

Apontamentos de Física I

David Sousa

April 2, 2019

Índice

1	Mecânica Elementar	5
1.1	Cinemática	5
1.1.1	Movimento retilíneo	5
1.1.2	Movimento curvilíneo	6
1.1.3	Movimento de translação relativo: Transformação de Galileu	8
1.1.4	Movimento circular	9
1.1.5	Movimento de rotação relativo	10
1.2	Dinâmica	11
1.2.1	Momento linear	11
1.2.2	Leis de Newton	12
1.2.3	Princípio clássico da relatividade	13
1.2.4	Rotação	14
1.3	Trabalho e energia	15
1.4	Sistemas de partículas	17
1.4.1	Dinâmica	17
1.4.2	Dinâmica de rotação	19
1.4.3	Energia	20
1.5	Movimento oscilatório	23
1.5.1	Lei de Hook	23
1.5.2	Movimento Harmónico Simples	24
1.6	Movimento ondulatório	26
2	Termodinâmica	29
2.1	Preliminares	29
2.2	Primeira lei da termodinâmica	31
2.3	Segunda lei da termodinâmica	33
2.3.1	Máquina de Carnot e temperatura absoluta	34
2.4	Entropia	36
2.5	Consequências da segunda lei	39
2.6	Potenciais termodinâmicos e relações de Maxwell	41

3	Electromagnetismo	45
3.1	Electrostática	45
3.1.1	O campo elétrico	45
3.1.2	Potencial elétrico e equações de Poisson e Laplace . . .	47
3.1.3	Trabalho e energia	48
3.1.4	Condições de fronteira electrostáticas	50
3.1.5	Condutores	51
3.2	Campo elétrico na matéria	52
3.2.1	Expansão em multipolos e dipolo elétrico	52
3.2.2	Polarização e carga ligada	54
3.2.3	Meios dielétricos	56
3.2.4	Meios dielétricos homegêneos, lineares e isotrópos . . .	57
3.3	Magnetostática	58
3.3.1	Força de Lorentz e corrente elétrica	58
3.3.2	O campo magnético	60
3.3.3	Vector de campo magnético	62
3.3.4	Condições de fronteira magnetostáticas	63
3.4	Campo magnético na matéria	64
3.4.1	Expansão em multipolos e dipolo magnético	64
3.4.2	Magnetização e corrente ligada	65
3.4.3	Meios magnetizados	67
3.4.4	Meios magnetizados lineares	68
3.5	Introdução à Electrodinâmica	69
3.5.1	Força electromotriz	69
3.5.2	Indução electromagnética	70
3.5.3	Equações de Maxwell	73
3.5.4	Leis da conservação	75
3.5.5	Ondas electromagnéticas	79

Capítulo 1

Mecânica Elementar

1.1 Cinemática

A cinemática é o estudo do movimento ignorando as suas causas.

Um corpo cujas dimensões podem ser desprezadas na descrição do seu movimento designa-se **partícula**.

1.1.1 Movimento retilíneo

Considere-se uma partícula em movimento relativamente a uma origem O no espaço unidimensional. A posição da partícula em cada instante t é dada ao longo de um eixo x por uma função $x(t)$. Para simplificar a notação a dependência do tempo será frequentemente omitida.

Deslocamento. Define-se como a variação da posição.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

onde $x_2 = x(t_2)$ é a posição final e $x_1 = x(t_1)$ a posição inicial.

Velocidade. Considere-se o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ correspondente ao deslocamento Δx .

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

é a velocidade média.

A velocidade em cada instante t define-se no limite em que $\Delta t \rightarrow 0$. i.e.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Aceleração. Seja $\Delta v = v_2 - v_1$ a variação da velocidade no intervalo de tempo Δt . A aceleração média escreve-se

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

e a aceleração em cada instante

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Se a $a = 0$, $v = \text{const.}$ e o movimento designa-se **movimento rectilíneo uniforme**.

$$\begin{aligned} dx &= v dt \\ x &= \int v dt + \text{const.} \\ x(t) &= x_0 + vt \end{aligned}$$

onde x_0 é a posição inicial.

Se a aceleração é constante e não nula, a velocidade varia durante o movimento, que neste caso designa-se **movimento rectilíneo uniformemente acelerado**.

$$\begin{aligned} dv &= a dt \\ v &= \int a dt + \text{const.} \\ v(t) &= v_0 + at \end{aligned}$$

onde v_0 é a velocidade inicial. E da definição de velocidade,

$$\begin{aligned} dx &= v(t) dt \\ x &= \int (v_0 + at) dt + \text{const.} \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1.2 Movimento curvilíneo

Se uma partícula se movimenta relativamente a uma origem O ao longo de uma curva C no espaço tridimensional, a sua posição a cada instante t é descrita pelo raio vector parametrizado $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$.

As definições de deslocamento, velocidade e aceleração aplicam-se a cada componente de \mathbf{r} .

Vector de deslocamento.

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \Delta x \hat{\mathbf{i}} + \Delta y \hat{\mathbf{j}} + \Delta z \hat{\mathbf{k}}$$

Vector de velocidade.

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}$$

Note-se que \mathbf{v} é tangente a C .

Vector de aceleração.

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}$$

Aceleração tangencial e aceleração normal. A aceleração é paralela à variação da velocidade ($\mathbf{a} \parallel \Delta \mathbf{v}$). Tem uma componente tangencial $\mathbf{a}_T \parallel \mathbf{v}$ e uma componente normal $\mathbf{a}_N \perp \mathbf{v}$.

$$\mathbf{a} = a_T \hat{\mathbf{u}}_T + a_N \hat{\mathbf{u}}_N \quad (1.2)$$

onde $\hat{\mathbf{u}}_T = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}$ e $\hat{\mathbf{u}}_N = \frac{d\hat{\mathbf{u}}_T/dt}{\|d\hat{\mathbf{u}}_T/dt\|}$ são vectores unitários. Considere-se as definições de **comprimento de arco** s e **curvatura** k ,

$$s = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| dt, \quad k = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{ds} \right\|$$

e seja $R = 1/k$ o raio de curvatura, que corresponde ao raio do círculo osculador ao ponto $\mathbf{r}(t)$ no plano que contém os vectores $\hat{\mathbf{u}}_T$ e $\hat{\mathbf{u}}_N$. A velocidade da partícula ao longo da curva C escreve-se

$$\mathbf{v}(t) = \|\mathbf{v}(t)\| \hat{\mathbf{u}}_T$$

e a aceleração

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{u}}_T + v(t) \frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt}$$

onde $\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt} = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt} \right\| \hat{\mathbf{u}}_N = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{ds} \frac{ds}{dt} \right\| \hat{\mathbf{u}}_N = kv \hat{\mathbf{u}}_N$, então,

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{u}}_T + kv^2 \hat{\mathbf{u}}_N \quad (1.3)$$

que é a composição da aceleração tangencial a_T e da aceleração normal a_N descrita por (1.2).

$$\begin{aligned} a_T &= \frac{dv}{dt} \\ a_N &= \frac{v^2}{R} \end{aligned} \quad (1.4)$$

A a_T é responsável pela variação do módulo da velocidade, e a a_N é responsável pela variação da direcção da velocidade.

Se o movimento é uniforme não há aceleração tangencial, mas se é curvilíneo há aceleração normal. Por outro lado se o movimento é rectilíneo, o raio de curvatura é infinito $a_N = 0$ e a aceleração é paralela à velocidade.

Movimento curvilíneo uniformemente acelerado. (\mathbf{a} constante $\neq 0$)

Repetindo o raciocínio que leva a (1.1), é simples mostrar que,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

Como \mathbf{r} está no plano definido por \mathbf{a} e \mathbf{v} , o movimento curvilíneo com aceleração constante acontece num plano.

1.1.3 Movimento de translação relativo: Transformação de Galileu

Considere-se um observador O na origem de um referencial fixo XYZ e um observador O' na origem de um referencial $X'Y'Z'$ que se move numa linha recta relativamente ao primeiro com velocidade \mathbf{v} . Seja \mathbf{R} o vector de posição de O' relativamente a O e \mathbf{r} o vector de posição de uma partícula no referencial XYZ . Assuma-se que $t' = t$ (as medidas de tempo são independentes do movimento relativo dos observadores).

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$$

é o vector de posição dessa partícula no referencial $X'Y'Z'$. Das definições de velocidade e aceleração

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_r$$

sendo $a_r = d\mathbf{v}/dt$ a aceleração relativa. Assumindo que o movimento é uniforme, $\mathbf{v} = \text{const} \Rightarrow \mathbf{a}_r = 0$. Neste caso, pondo $t = 0$ quando O e O' coincidem, $\mathbf{R} = \mathbf{v}t$ e tem-se a transformação de Galileu.

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{v}, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a}, \quad t' = t \quad (1.5)$$

A aceleração de uma partícula é um invariante para todos os sistemas de referência que estejam em translação relativa uniforme.

1.1.4 Movimento circular

O Movimento circular é um caso especial do movimento curvilíneo, em que a trajetória é uma circunferência. Neste caso o comprimento de arco escreve-se $s = R\theta$, sendo θ o ângulo correspondente à variação da posição da partícula ao longo do circunferência.

Velocidade angular. Seja \mathbf{v} a velocidade tangencial à trajetória. O módulo da velocidade é

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

onde $d\theta/dt$ chama-se velocidade angular ω . Então,

$$v = \omega R \tag{1.6}$$

Aceleração angular. Define-se como

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Movimento circular uniforme. (ω é constante)

Neste caso o movimento é periódico, i.e a posição da partícula num determinado ponto da circunferência repete-se em intervalos regulares de tempo T - **período**. O número de revoluções por unidade de tempo chama-se **frequência** ν .

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Integrando $d\theta = \omega dt$,

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Pondo $\theta_0 = 0$ e $t_0 = 0$, $\omega = \frac{\theta}{t}$. E para um volta completa, $t = T$, $\theta = 2\pi$ e $\omega = 2\pi\nu$.

Movimento circular uniformemente acelerado. (α constante $\neq 0$)

Repetindo novamente o raciocínio que leva (1.1), demonstra-se facilmente que

$$\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Relações vectoriais. Supondo que o movimento circular acontece num plano paralelo a XY e que o centro da trajectória está no eixo Z , seja $\mathbf{r}(t)$ a posição de uma partícula a cada instante t e γ o ângulo entre \mathbf{r} e Z . Como \mathbf{v} é perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{r} ,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

e (1.6) escreve-se $v = \omega r \sin \gamma$. A aceleração da partícula é $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. E se o movimento é uniforme $\boldsymbol{\omega} = \text{const.}$ mas $\mathbf{a} \neq 0$ uma vez que \mathbf{v} varia de direcção. Então,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Claro que $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$ e tem a direcção radial. Chama-se por isso **aceleração centrípeta** \mathbf{a}_c (Recorde-se a aceleração normal (1.4)).

$$a_c = \|\mathbf{a}_c\| = \|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}\| = \omega v = \omega^2 R \quad \text{ou} \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

Se o movimento não é uniforme, (Recorde-se a relação (1.3)), o módulo da velocidade varia devido à aceleração tangencial,

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \alpha R$$

1.1.5 Movimento de rotação relativo

Um observador O' num referencial $X'Y'Z'$ gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em torno de um observador O num referencial fixo XYZ . Considere-se que as origens dos referenciais coincidem e que não há movimento de translação. Seja \mathbf{r} a posição de uma partícula P em relação à origem dos referenciais. Supondo que a partícula está em repouso relativamente a O' , a velocidade de P medida por O é

$$\mathbf{V} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_O = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Se P tem velocidade \mathbf{V}' relativamente a O' , i.e. se $\mathbf{V}' = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{O'} \neq 0$,

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Supondo agora que P tem aceleração $\mathbf{a}' = \left(\frac{d\mathbf{V}'}{dt} \right)_{O'}$ em relação a O' . Pretende-se obter a aceleração medida no referencial O :

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_O = \left(\frac{d\mathbf{V}'}{dt} \right)_O + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_O$$

onde $\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_o = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

e $\left(\frac{d\mathbf{V}'}{dt}\right)_o = \left(\frac{d\mathbf{V}'}{dt}\right)_{o'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}' = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$

então,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

onde o segundo termo chama-se **aceleração de coriolis** e o terceiro corresponde a uma **aceleração centrífuga**.

1.2 Dinâmica

A dinâmica pretende estabelecer uma relação entre o movimento e as causas do movimento.

Chama-se **partícula livre** a uma partícula que não está sujeita a nenhuma interacção. Admite-se que o movimento da partícula é relativo a um referencial que também não está sujeito a nenhuma interacção. Este designa-se **referencial inercial**. Um observador num referencial inercial chama-se **observador inercial**.

1.2.1 Momento linear

Considere-se um sistema isolado de duas partículas 1 e 2 sujeitas apenas à sua interacção mútua no intervalo de tempo $\Delta t = t' - t$. Observa-se que as variações das velocidades $\Delta \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1$ e $\Delta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2$ produzidas pela interacção entre elas têm sempre direcções opostas, e que

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}_1|}{|\Delta \mathbf{v}_2|} = \text{const.}$$

Mais precisamente, $|\Delta \mathbf{v}_1|$ e $|\Delta \mathbf{v}_2|$ são inversamente proporcionais às massas m_1 e m_2 , então

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}_1|}{|\Delta \mathbf{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

e

$$m_1 \Delta \mathbf{v}_1 = -m_2 \Delta \mathbf{v}_2 \quad (1.7)$$

Momento linear. Define-se como

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}}$$

Princípio da conservação do momento. Reescrevendo a eq. (1.7),

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2$$

isto é, a interacção entre elas produz uma troca de momento. Explicitamente,

$$\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}'_2 + \mathbf{p}_2$$

e reorganizando os termos,

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

Seja $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ e $\mathbf{P}' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$ o momento total nos instantes t e t' respectivamente,

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}$$

Generalizando: O momento total de um sistema de partículas sujeitas apenas à sua interacção mútua permanece constante.

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i = \text{const.}$$

Sempre que este princípio parece ser violado procura-se um factor desconhecido.

1.2.2 Leis de Newton

Primeira Lei de Newton ou Lei da Inércia. Uma partícula livre num referencial inercial move-se com velocidade constante. Ou por outras palavras: Para uma partícula livre num referencial inercial,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$$

Definição de Força e Segunda Lei de Newton.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{ou} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

isto é, a taxa de variação do momento de uma partícula em relação ao tempo é igual à força que actua sobre a partícula.

A equação anterior chama-se equação do movimento.

Se nenhuma força actua sobre a partícula, $\mathbf{F} = 0$, a partícula é livre e está em repouso ou tem velocidade constante de acordo com a Lei da Inércia.

Terceira Lei de Newton ou Lei da acção-reacção. Voltando ao sistema de duas partículas, é claro que

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

isto é, a força exercida pela primeira partícula sobre a segunda tem módulo igual e direcção oposta à força exercida pela segunda partícula sobre a primeira.

Força resultante e equilíbrio. Se uma partícula m interage com n partículas, cada uma delas produz uma variação no momento de m caracterizado pelas forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \dots \mathbf{F}_n$, tal que a taxa de variação do momento de m se escreve

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}$$

que é a força resultante que actua sobre m .

Se a força resultante é nula a partícula está em repouso ou em movimento uniforme. Neste caso diz-se que está em equilíbrio.

1.2.3 Princípio clássico da relatividade

Pretende-se verificar que as leis do movimento que são válidas num referencial inercial são válidas em todos os referenciais inerciais. Voltando novamente ao sistema de duas partículas, se não actuam forças externas sobre as partículas, pelo princípio da conservação do momento,

$$m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 = \text{const.}$$

onde \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 são medidos relativamente a um observador inercial O . Recorde-se a transformação de Galileu (1.5). Para um observador inercial O' ,

$$m_1(\mathbf{V}'_1 + \mathbf{v}) + m_2(\mathbf{V}'_2 + \mathbf{v}) = \text{const.}$$

$$m_1 \mathbf{V}'_1 + m_2 \mathbf{V}'_2 = \text{const.} - (m_1 + m_2)\mathbf{v}$$

Como \mathbf{v} é constante o observador O' também verifica o princípio da conservação do momento. A conservação da massa é uma evidência experimental. Da transformação de Galileu tem-se também que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, então, pela segunda lei de Newton,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'$$

isto é, os dois observadores medem a mesma força. as leis do movimento são as mesmas para todos os observadores inerciais que se movem com velocidade relativa constante.

1.2.4 Rotação

Torque. Supondo que o efeito de uma força \mathbf{F} é mover uma partícula em torno de um observador inercial O , é uma evidência experimental que a força necessária para efectuar a rotação é proporcional ao **braço de força** b , isto é, à distância mais curta medida entre O e a linha de acção da força. É por isso conveniente definir o torque,

$$\tau = Fb$$

com $b = r \sin \theta$, admitindo que r é o módulo do vector de posição \mathbf{r} da partícula e θ o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{F} . Em termos vectoriais,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

que é perpendicular ao plano definido por \mathbf{r} e \mathbf{F} .

Momento angular. Se uma partícula se move relativamente a um observador inercial O com momento linear $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, o momento angular define-se como

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

e o módulo como $L = mrv \sin \theta$. \mathbf{r} é o vector de posição da partícula relativamente a O e θ o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{v} .

\mathbf{L} é perpendicular ao plano definido por \mathbf{r} e \mathbf{v} e tem a direcção do torque. De facto, é fácil mostrar que,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

Geralmente o momento angular varia em módulo e direcção durante o movimento da partícula, mas se o movimento acontece num plano que contém O , a direcção de \mathbf{L} permanece constante uma vez que \mathbf{r} e \mathbf{v} são coplanares.

No caso especial do movimento circular, $\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$ e $v = \omega r$ implica que $L = mrv = mr^2\omega$. Em termos vectoriais $\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega}$

Força central. Se o torque de uma partícula é nulo,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{L} = \text{const.} \quad (1.8)$$

o que só acontece se a partícula é livre ($\mathbf{F} = 0$) ou se $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$, isto é, se a direcção da força passa pelo ponto O . Neste caso chama-se força central e o ponto fixo, centro de força.

Se uma partícula se move sujeita a uma força central, o momento angular em relação ao centro de força é uma constante do movimento e o contrário é verdade.

1.3 Trabalho e energia

O trabalho realizado pela força resultante \mathbf{F} que actua sobre uma partícula ao longo de uma trajectória entre os pontos a e b , escreve-se

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F_T ds$$

onde F_T é a força tangencial à trajectória e ds um elemento infinitesimal da curva.

Potência. Define-se como

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \text{ou} \quad P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Energia cinética. Se uma partícula se move ao longo de uma curva C sob a acção de uma força \mathbf{F} , a força tangencial escreve-se $F_T = m \frac{dv}{dt}$, e neste caso,

$$W = \int_a^b F_T ds = \int_a^b mv dv = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

À quantidade

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

chama-se energia cinética, então,

$$W = \Delta T. \tag{1.9}$$

Trabalho de uma força constante. Quando a força responsável pelo movimento de uma partícula é constante em módulo e em direcção

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_b - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_a$$

isto é, o trabalho não depende da trajectória efectuada pela partícula, depende só do deslocamento.

Energia Potencial. No parágrafo anterior tem-se um exemplo de uma **força conservativa**, isto é, uma força cuja dependência do vector de posição \mathbf{r} da partícula é tal que

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(a) - U(b)$$

é independentemente da trajectória da partícula. Onde U é a energia potencial. Então,

$$W = -\Delta U \quad (1.10)$$

Em particular se a trajectória da partícula é fechada,

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

que é também uma condição para que uma força seja conservativa.

Note-se que a energia potencial define-se a menos de uma constante aditiva.

Relação com a força.

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU$$

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla U}$$

Se U só depende da distância r e não da direcção, $F = dU/dr$. Reciprocamente, se a força é central a energia potencial depende só da distância ao centro. Vejamos, se o movimento acontece num plano considere-se o vector posição da partícula escrito em coordenadas polares $\mathbf{r} = (r, \theta)$, tal que o deslocamento infinitesimal $d\mathbf{r}$ possa ser decomposto numa componente radial dr e numa componente transversal $r d\theta$. Nesse caso,

$$F_r = -\frac{dU}{dr} \quad \text{e} \quad F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{dU}{d\theta}$$

Como a força é central (1.8), o torque é nulo e só pode depender de F_θ o que implica que $rF_\theta = \frac{dU}{d\theta} = 0$ e que a energia potencial só depende da distância ao centro.

Conservação da Energia. Quando as forças que actuam sobre uma partícula são conservativas tem-se de (1.9) e (1.10) que

$$\Delta T = -\Delta U$$

$$\Delta(T + U) = 0$$

onde $T + U$ é a energia total da partícula,

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + U}$$

Se as forças que actuam sobre uma partícula são conservativas a energia total da partícula conserva-se.

1.4 Sistemas de partículas

Nesta secção pretende-se generalizar os conceitos já explorados nas secções anteriores a sistemas de partículas.

1.4.1 Dinâmica

A descrição do movimento de um sistema de partículas faz-se relativamente a um referencial inercial $X_L Y_L Z_L$ designado **Laboratório L**.

Sistema isolado. Considere-se um sistema composto por n partículas de massas $m_1, m_1 \dots m_n$ e vectores posição $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n$. O **centro de massa** do sistema (CM) é um ponto cujo o vector posição é dado por

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

onde M é a massa total do sistema. A **velocidade do sistema** escreve-se

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{v}_i \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}_{CM} = \frac{\mathbf{P}}{M}$$

onde $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i$ é o momento total do sistema dado que \mathbf{p}_i é o momento da partícula i . Portanto o CM do sistema é um ponto no qual se supõe que esteja concentrada toda a massa do sistema. Recorde-se princípio da conservação do momento:

O momento do CM de um sistema isolado conserva-se relativamente a um referencial inercial.

Por vezes é conveniente definir um referencial inercial C : $X_C Y_C Z_C$ fixo no CM do sistema. É claro que o momento do sistema medido neste referencial é nulo.

Sistema sujeito a forças externas. Considerando que há interacções entre as partículas constituintes do sistema existem **forças internas** associadas a cada par de partículas. Estas obedecem à terceira lei de Newton, pelo que não produzem nenhuma variação no momento total do sistema. Se o sistema está sujeito a forças externas, A força resultante que actua sobre o sistema é

$$\mathbf{F}_e = \sum \mathbf{F}_i$$

sendo \mathbf{F}_i a força externa que actua sobre a partícula i . Como a variação do momento total do sistema depende só de forças externas,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_e$$

e como $\mathbf{P} = M\mathbf{a}_{CM}$,

$$\mathbf{F}_e = M\mathbf{a}_{CM}$$

Sistemas de duas partículas e massa reduzida. Seja \mathbf{F}_{12} a força exercida pela partícula p_2 sobre a partícula p_1 e \mathbf{F}_{21} a força exercida pela p_1 sobre a p_2 . Pela terceira Lei de Newton $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. A eq. do movimento para cada partícula relativamente a um observador inercial O escreve-se

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12} \quad \text{e} \quad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21}$$

respectivamente. Dividindo as eqs. anteriores por m_1 e m_2 respectivamente e subtraindo a segunda à primeira,

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12}$$

Note-se que $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{12}$ é a velocidade da p_1 relativamente a p_2 . Seja

$$\frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

μ chama-se massa reduzida do sistema. Então,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{12} \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}_{12} = \mu \mathbf{a}_{12}$$

Isto é, A força exercida pela partícula p_2 sobre a partícula p_1 é proporcional à aceleração da p_1 relativamente à p_2 . Então, o movimento de duas partícula sujeitas à sua interacção mútua é equivalente ao movimento de uma partícula de massa μ .

1.4.2 Dinâmica de rotação

O **momento angular de um sistema de partículas** relativamente a um observador inercial define-se como,

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i$$

onde \mathbf{L}_i é o momento angular da partícula i . O torque total das forças externas que actuam sobre as partículas do sistema escreve-se

$$\boldsymbol{\tau}_e = \sum \boldsymbol{\tau}_i$$

É claro que,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_e \quad (1.11)$$

o que pode ser considerado como uma lei fundamental da dinâmica de rotação. Note-se que não há uma contribuição devida a forças internas, porque se estas se cancelam devido à terceira lei de Newton aplicada a cada par de partículas, os torques relativamente a um ponto qualquer são nulos.

Na ausência de forças externas $\boldsymbol{\tau} = 0$ e $\mathbf{L} = \text{const.}$ o que expressa a conservação do momento angular: o momento angular total de um sistema isolado conserva-se.

Spin e momento angular orbital. O spin \mathbf{L}_s de um sistema de partículas define-se como o momento angular do sistema relativamente ao seu centro de massa sendo independente do observador. Por outro lado, o momento angular orbital do sistema define-se relativamente ao referencial $X_L Y_L Z_L$.

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$$

Sendo assim, o momento angular total do sistema no referencial L é $\mathbf{L} = \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_o$. A taxa de variação temporal do momento angular orbital obedece à eq. (1.11). Análogamente, a taxa de variação temporal do spin é

$$\frac{d\mathbf{L}_s}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{CM}$$

Momento angular de um corpo rígido. Um sistema de muitas partículas chama-se **corpo rígido** se as distâncias entre as partículas permanecem fixas durante o movimento do sistema.

O movimento é geralmente composto por uma **translação**, isto é, todas as partículas descrevem trajetórias paralelas relativamente à sua posição inicial, e uma **rotação** em torno de um eixo, que acontece quando todas

as partículas giram em torno desse eixo denominado **eixo de rotação**, que pode ser fixo ou variar de direção.

Recorde-se a dinâmica de rotação para o caso de uma partícula 1.2.4. Se para cada partícula de um corpo rígido $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$, é permitido escrever

$$\mathbf{L}_i = m_i R_i^2 \boldsymbol{\omega}$$

para cada partícula i . Claro que todas as partículas têm a mesma velocidade angular. Então,

$$\mathbf{L} = \left(\sum m_i R_i^2 \right) \boldsymbol{\omega}$$

onde a quantidade entre parêntesis chama-se **momento de inércia** do corpo relativamente ao eixo de rotação,

$$I = \sum m_i R_i^2$$

então,

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$$

Se o corpo rígido tem uma forma arbitrária o momento angular não é paralelo à velocidade angular para todas as partículas e a relação anterior nem sempre se aplica. No entanto, independentemente da forma do corpo, existem sempre pelo menos três direções perpendiculares entre si para as quais o momento angular é paralelo ao eixo de rotação e a relação anterior é válida. Isto, é três **eixos principais de inércia** que constituem um referencial associado ao corpo e que gira com ele. Os momentos de inércia correspondentes aos três eixos designam-se **momentos principais de inércia**. Sempre que um corpo rígido tem algum tipo de simetria os eixos de simetria coincidem com os eixos principais de inércia.

Equação do movimento para a rotação de um corpo rígido. Considere-se um corpo rígido que gira em torno de um dos seus eixos principais de inércia, então, $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$. E dada a eq. (1.11),

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\tau} = I \boldsymbol{\alpha}$$

1.4.3 Energia

Conservação da energia de um sistema de partículas. Seja $T = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ a energia cinética da partícula i relativamente a um observador inercial num referencial L . Para um sist. de partículas

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{1.12}$$

Seja W_{ext} o trabalho realizado pelas forças externas sobre as partículas do sistema, e W_{int} o trabalho realizado pelas forças internas. O trabalho total é $W = W_{ext} + W_{int}$. Dada a eq. (1.9),

$$\Delta T = W_{ext} + W_{int}$$

Se as forças internas são conservativas, existe uma energia potencial U_{ij} associada a cada par de partículas i, j que depende da natureza da interacção. Nesse caso a energia potencial interna do sistema é

$$U_{int} = \sum_{i,j} U_{ij}$$

Recorde-se a eq. (1.10),

$$\begin{aligned} W_{int} &= -\Delta U_{int} \\ \Delta T &= W_{ext} - \Delta U_{int} \\ \Delta(T + U_{int}) &= W_{ext} \end{aligned}$$

sendo

$$E = T + U_{int} \quad (1.13)$$

a energia do sistema.

$$\Delta E = W_{ext} \quad (1.14)$$

Quando $W_{ext} = 0$, a energia do sistema $T + U_{int} = \text{const.}$ Isto é, a energia de um sistema de partículas isolado conserva-se relativamente a um observador inercial.

Energia de um sistema sujeito a forças externas. Caso as forças que actuam sobre um sistema sejam conservativas,

$$\begin{aligned} W_{ext} &= -\Delta U_{ext} \\ \Delta E &= -\Delta U_{ext} \\ \Delta(E + U_{ext}) &= 0 \end{aligned}$$

o que implica que $E + U_{ext} = \text{const.}$

A quantidade,

$$E = T + U_{int} + U_{ext}$$

é a energia total do sistema, que permanece constante durante o movimento se todas as forças internas e externas são conservativas.

Energia interna de um sistema de partículas. Defina-se a energia interna de um sistema de partículas,

$$E_{int} = T_{int} + U_{int}$$

e note-se que a energia cinética pode ser decomposta em dois termos distintos,

$$T = T_{int} + T_{orb}$$

onde T_{int} é a energia cinética interna dada pela eq. (1.12) relativamente ao referencial C , e $T_{orb} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ a energia cinética orbital do centro de massa relativamente a um referencial L .

$$T = T_{int} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \quad (1.15)$$

Sabendo que a energia do sistema é dada por (1.13) e combinando as duas equações anteriores,

$$E = E_{int} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

o que indica que se o centro de massa do sistema está em repouso relativamente a L , a energia do sistema coincide com a energia interna. Voltando agora à eq. (1.14), é claro que a energia cinética orbital e a energia interna variam na presença de forças externas.

Se a soma das forças externas que actuam sobre o sistema for nula, $v_{CM} = \text{const.}$ e $\Delta E_{int} = W_{ext}$.

Se $W_{ext} = 0$, as energias interna e cinética orbital permanecem constantes.

Se $\Delta E_{int} = 0$ como num caso de um corpo rígido, $T_{orb} = W_{ext}$.

Energia de rotação de um corpo rígido. Considere-se a energia cinética de rotação do corpo rígido,

$$T = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \left(\sum \frac{1}{2}m_i R_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1.16)$$

Esta expressão é válida para qualquer eixo mesmo que não seja um eixo principal. Quando a rotação acontece em torno de um eixo principal pode escrever-se

$$T = \frac{L^2}{2I}$$

Considere-se a eq. (1.15). Quando um corpo rígido tem movimento de translação relativamente a um observador inercial num referencial L , e para além disso gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa,

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

isto é, a energia cinética interna é dada pela eq. (1.16), e assumindo que para um corpo rígido as distâncias entre as partículas permanecem constantes durante a translação do corpo, a energia potencial associada à interacção entre cada par de partículas permanece constante, o que significa que a energia potencial interna é constante, sendo irrelevante na análise da variação da energia do corpo. Considerando que o corpo está sujeito a forças externas conservativas,

$$E = T + U_{ext}$$

sendo U_{ext} o potencial associado às forças externas. Então,

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + U$$

1.5 Movimento oscilatório

1.5.1 Lei de Hook

Lei de Hook e pequenas oscilações. Um corpo numa posição de equilíbrio x_0 que sofre um deslocamento x relativamente a x_0 experimenta uma força restauradora $F(x)$ proporcional a x .

$$F(x) = -kx$$

onde k é uma constante positiva. Uma mola ideal satisfaz esta lei até um certo limite.

Considere-se um potencial arbitrário $U(x)$ com um mínimo local em x_0 . O desenvolvimento da função $U(x)$ em série de Taylor expressa o comportamento do potencial na vizinhança de x_0 ,

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

O 1º termo é irrelevante. Alterar o potencial por uma constante não altera a física do sistema. A força é a derivada do potencial e a derivada de uma

constante é 0. O 2º termo é nulo porque se considera a derivada no valor mínimo do potencial e os restantes termos de ordem superior a 2 são desprezáveis relativamente ao 3º termo. Por isso,

$$U(x) \approx \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$$

o que significa que o potencial é da forma $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ onde $k \equiv U''(x_0)$.

Qualquer potencial pode ser aproximado por uma parábola na vizinhança de um mínimo. A aplicabilidade da Lei de Hook é por isso bastante vasta.

1.5.2 Movimento Harmónico Simples

Movimento harmónico simples consiste na variação periódica da posição de um corpo em torno de um ponto de equilíbrio x_0 , com amplitude A e frequência $\nu = 1/T$ constantes. Sendo T o período do movimento e $\omega = 2\pi\nu$ a frequência angular. A partir daqui serão sempre consideradas pequenas oscilações.

Equação do oscilador harmónico (OH). Considere-se um sistema isolado em que actua uma única força $F(x) = -kx$. Esse sistema é um oscilador e executa movimento harmónico simples. Pela 2ª Lei de Newton,

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \tag{1.17}$$

onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Resolver a eq. do OH para $x(t)$. A equação (1.17) é uma eq. diferencial linear homogénea de 2ª ordem. Considere-se polinómio característico $p(r) = r^2 + \omega^2$.

$$r_{1,2} = \pm i\omega$$

Tem-se por isso duas sols, $c_1e^{i\omega t}$ e $c_2e^{-i\omega t}$. A propriedade da linearidade das eqs. diferenciais leva a que todas as sols. da eq. (1.17) sejam da forma,

$$x(t) = c_1e^{i\omega t} + c_2e^{-i\omega t}$$

onde c_1 e c_2 são constantes complexas. Como a posição $x(t)$ do oscilador é um valor real tem-se $c_1 = c_2^*$ i.e.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= c_0 e^{i\phi} e^{i\omega t} + c_0 e^{-i\phi} e^{-i\omega t} \\
 &= \operatorname{Re}(2c_0 e^{i(\omega t + \phi)}) \\
 &= 2c_0 \cos(\omega t + \phi) \\
 &= A \cos(\omega t + \phi) \\
 &= A \sin(\omega t + \phi')
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

onde ϕ é a fase (note-se que $\phi' = \phi - \frac{\pi}{2}$). A , ω e ϕ são constantes reais.

A solução pode ser escrita de várias formas (trigonométricas e exponenciais) e depende sempre de dois parâmetros determinados a partir das condições iniciais. Considerando a forma genérica (1.18) esses parâmetros são A e ϕ .

Dadas as condições iniciais,

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cos \phi = x_0 \\ -A\omega \sin \phi = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 \cos \phi - \frac{x_1}{\omega} \sin \phi \\ \phi = \arctan\left(-\frac{x_1}{x_0 \omega}\right) \end{cases}$$

Velocidade e Aceleração. Considere-se de um oscilador cuja posição ao longo do tempo é descrita pela eq. (1.18).

A velocidade $v(t)$ do oscilador é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= -\omega A \sin(\omega t + \phi) \\
 &= \omega A \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

e a aceleração $a(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{dv}{dt} &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \\
 &= \omega^2 A \cos(\omega t + \phi + \pi)
 \end{aligned}$$

Note-se as diferenças de fase entre $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$. Na posição correspondente à amplitude, a velocidade é nula e a aceleração é máxima. Na posição correspondente ao ponto de equilíbrio, a velocidade é máxima e a aceleração é nula.

Energia. $F(x) = -kx$ é uma força conservativa, i.e $F = -\nabla U$.

$$\begin{aligned} E &= U + T \\ &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2}k(A^2 \cos^2(\omega t + \phi)) + \frac{1}{2}m(\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)) \\ &= \frac{1}{2}kA^2(\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$

Note-se que $\frac{1}{2}kA^2$ é a energia do oscilador na posição correspondente à amplitude. A energia total é conservada.

Oscilações Amortecidas. Se um sistema não é conservativo considere-se forças de atrito F_a . Assumindo que o amortecimento é proporcional à velocidade do movimento do oscilador, a eq. para o movimento harmônico (1.17) inclui um termo adicional $\propto \dot{x}$,

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \gamma = \frac{b}{k}, \quad \omega = \frac{k}{m}$$

sendo γ a constante de amortecimento. A sol. geral desta equação diferencial é bem conhecida,

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\gamma \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}$$

onde c_1 e c_2 se determinam a partir das condições iniciais.

1.6 Movimento ondulatório

Breve definição de onda. Uma onda é a propagação de uma perturbação num meio através de um conjunto de osciladores correlacionados.

Progressão de uma onda. Se Φ é uma perturbação que se propaga com velocidade constante c no sentido positivo do eixo x , em $t = 0$ tem-se o perfil de onda $f(x) = \Phi$. Considere-se que o perfil não se altera ao longo do tempo. Após um intervalo de tempo t a perturbação deslocou-se uma distância ct . Defina-se um novo referencial em $x = ct$ e designe-se por X as

distâncias medidas nesse referencial. É claro que $x = X + ct$. Então se no segundo referencial, $\Phi = f(X)$, no primeiro referencial tem-se,

$$\Phi = f(x - ct)$$

Ondas harmônicas. Ondas cujo perfil é uma curva sinusoidal.

$$\Phi \Big|_{t=0} = A \cos mx$$

Seguindo as conclusões do parágrafo anterior tem-se para $t > 0$,

$$\Phi = A \cos m(x - ct)$$

onde A refere-se ao módulo máximo da perturbação, i.e a **amplitude**. Note-se que a onda repete-se em intervalos regulares de $\frac{2\pi}{m}$. Essa distância chama-se **comprimento de onda** λ , que é a escala característica da onda. Então,

$$\Phi = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)$$

O intervalo de tempo correspondente à distância de um comprimento de onda é o **período** T . Tendo em conta a periodicidade da função coseno,

$$\frac{2\pi}{\lambda}cT = 2\pi \Rightarrow T = \frac{\lambda}{c}$$

O inverso do período $\nu = \frac{1}{T}$ é a **frequência** - número de ondas por unidade de tempo. Então $c = \lambda\nu$ e

$$\Phi = A \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t \right)$$

simplificando,

$$\Phi = A \cos(kx - \omega t)$$

ou numa forma matemática mais versátil

$$\Phi = Ae^{i(kx - \omega t)} \tag{1.19}$$

onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o **número de onda** (número de ondas por unidade de distância) e $\omega = 2\pi\nu$ a **frequência angular**.

A onda plana é simplesmente uma generalização da onda harmónica a três dimensões,

$$\Phi = f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)$$

sendo \mathbf{n} um vector normal à **frente de onda**. i.e. um plano perpendicular à direcção de propagação da perturbação que é constante em todos os pontos do plano.

A equação de onda É fácil verificar que a expressão (1.19) satisfaz a equação de onda

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{1}{c} \frac{d^2\Phi}{dt^2}$$

Generalizando, para uma onda plana

$$\boxed{\nabla^2\Phi = \frac{1}{c} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}}$$

Princípio da sobreposição. Se Φ_1 e Φ_2 são duas soluções de uma equação linear então $a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2$ é também solução dessa equação, sendo a_1 e a_2 duas constantes arbitrárias.

Onda estacionária Um exemplo em que se aplica o princípio da sobreposição é o do caso de duas ondas com a mesma amplitude e velocidade que se deslocam em sentidos opostos,

$$\begin{aligned}\Phi &= A \cos(kx - \omega t) + A \cos(kx + \omega t) \\ &= 2A \cos 2\pi kx \cos 2\pi nt\end{aligned}$$

Neste caso a onda não se move. Note-se que Φ anula-se nos pontos em que $2\pi kx = 0$, isto é nos **nodos**. Os **anti-nodos** são os pontos em que a amplitude tem valor máximo. A distância entre nodos e antinodos sucessivos é $1/2k$, o que é metade do comprimento de onda.

Capítulo 2

Termodinâmica

2.1 Preliminares

Um sistema termodinâmico é qualquer sistema macroscópico. Os parâmetros que o caracterizam são as quantidades macroscópicas mensuráveis, pressão P , volume V , temperatura T e campo magnético H , definidas experimentalmente.

Uma grandeza termodinâmica designa-se **extensiva** se é proporcional à quantidade de substância do sistema em consideração, e **intensiva** se é independente da quantidade de substância.

O estado termodinâmico é caracterizado pelos parâmetros necessários para descrever o sistema. Quando o estado não se altera com o tempo diz-se que o sistema está no **estado de equilíbrio** termodinâmico. A menos que especificado, a palavra estado refere-se sempre ao estado de equilíbrio.

A equação de estado é uma relação funcional entre todos os parâmetros do sistema. Se por exemplo P , V e T são os parâmetros do sist.

$$f(P, V, T) = 0$$

é a equação de estado.

f pode ser representada como um ponto no espaço PVT .

Uma transformação termodinâmica é uma mudança de estado. Se o estado inicial é o estado de equilíbrio, essa mudança implica a alteração das condições externas.

A transformação diz-se **quasi-estática** se as condições externas se alteram tão lentamente que a cada instante o estado do sistema está muito próximo do equilíbrio.

A transformação é **reversível** se o sistema retrocede na sucessão de estados da transformação quando as condições externas retrocedem no tempo. Uma transformação reversível é sempre quasi-estática mas o contrário não é verdade. Uma transformação deste tipo pode ser representada como uma linha contínua num diagrama PV . Uma transformação que não é reversível não pode ser representada.

Trabalho. Recorde-se o conceito de trabalho da mecânica. O trabalho realizado por um sistema numa transformação infinitesimal que envolva os parâmetros P , V e T , na qual o volume aumenta dV é,

$$\boxed{dW = P dV}$$

Calor. Se a temperatura de um sistema homogéneo aumenta em ΔT sem trabalho efectuado, uma quantidade de **calor** ΔQ é absorvida, isto é,

$$\boxed{\Delta Q = C \Delta T}$$

onde C é a **capacidade calorífica**, que depende da natureza do sistema e da forma de aquecimento.

C_V indica que o aquecimento é feito a volume constante e C_P indica que o aquecimento é feito a pressão constante.

Se a capacidade calorífica é dada por unidade de massa ou por mole de substância designa-se **calor específico**.

Transformações especiais.

- Uma transformação é **cíclica** se os estados inicial e final são idênticos, i.e. considerando a primeira lei da termodinâmica (ver (2.1)), $\Delta U = 0$ implica que $\Delta W = \Delta Q$.
- Uma transformação em que não há trocas de calor ($\Delta Q = 0$) designa-se **adiabática**.
- Se um sistema não efectua trabalho durante uma transformação ($\Delta W = 0$) esta chama-se **isocórica**.
- Uma transformação é **isotérmica** se $\Delta T = 0$.

Gás ideal. O sistema termodinâmico mais simples é o gás ideal clássico. Isto é, um gás no limite de baixa pressão e temperatura alta.

$$T \propto \lim_{P \rightarrow 0} PV$$

A equação de estado deste sistema é dada pela **lei do gás ideal**,

$$\boxed{PV = nRT}$$

sendo n o número de moles e R uma constante do gás, ou equivalentemente, dado o número e Avogadro,

$$PV = NkT$$

onde k é a constante de Boltzmann e N o número de moléculas.

T é a temperatura do gás ideal, independente das propriedades do material.

2.2 Primeira lei da termodinâmica

Se numa transformação arbitrária uma quantidade de calor ΔQ é absorvida e uma quantidade de trabalho ΔW é realizada pelo sistema, a variação da **energia interna** é dada por,

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W \quad (2.1)$$

isto é, a variação da energia interna do sistema é a diferença entre o calor absorvido e o trabalho realizado pelo sistema.

A lei enunciada está de acordo com princípio da conservação da energia, e resulta da demonstração experimental de Joule da equivalência entre a energia mecânica e o calor.

Para uma transformação infinitesimal,

$$\boxed{dU = dQ - dW}$$

é um diferencial exacto. Isto é, a energia interna U é uma função para a qual $\int dU$ é independente da transformação, sendo apenas dependente dos limites de integração, o que não se verifica para Q e W . Então U define-se a menos de uma constante aditiva. É de notar que U é uma grandeza extensiva.

Se um sistema se caracteriza pelos parâmetros P , V e T , e dois destes parâmetros são variáveis independentes, ex: $U = U(P, V)$, o outro determina-se a partir da equação de estado. Nesse caso,

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_V dP + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_P dV$$

Numa transformação infinitesimal reversível para a qual $dW = P dV$ a expressão para o calor absorvido pelo sistema é, para cada par de parâmetros independentes (P, V) , (P, T) , (V, T) ,

$$\begin{aligned} dQ &= \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V dP + \left[\frac{\partial U}{\partial V} + P\right]_P dV \\ dQ &= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T + P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\right] dP + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] dT \\ dQ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] dV \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde

$$C_V \equiv \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad (2.3)$$

$$C_P \equiv \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P \quad (2.4)$$

sendo $H = U + PV$ a **entalpia** do sistema.

Expansão livre de um gás ideal no vácuo. É um facto que a temperatura inicial é a mesma que a temperatura final. Como o gás não efectua trabalho no meio envolvente $\Delta W = 0$, por outro lado $\Delta T = 0$ implica que $\Delta Q = 0$, então, $\Delta U = 0$, isto é, os estados inicial e final têm a mesma energia interna e a mesma temperatura mas volumes diferentes.

Energia interna de um gás ideal. Considere-se a eq. (2.3). Assumindo que C_V não depende da temperatura.

$$U = C_V T \quad (2.5)$$

É intuitivo que no aquecimento de um gás ideal a volume constante o gás não efectua trabalho, o que significa que o calor transferido provoca o aumento da energia interna. É mais eficiente aquecer o gás a volume constante do que a pressão constante. De facto, dada a eq. (2.4) e substituindo a eq. anterior e a eq. de estado para um gás ideal na expressão para a entalpia tem-se

$$C_P = C_V + Nk$$

Transformação adiabática reversível. Como $dQ = 0$ tem-se $dU = -P dV$ e dada a eq. (2.5),

$$C_V dT + P dV = 0$$

Por outro lado, considere-se a eq. de estado do gás ideal,

$$dT = \frac{d(PV)}{Nk} = \frac{P dV + V dP}{Nk}$$

e combinando as duas eqs. anteriores,

$$C_V(P dV + V dP) + NkP dV = 0$$

$$C_V V dP + (C_V + Nk)P dV = 0$$

$$C_V V dP + C_P P dV = 0$$

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

onde $\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V}$. Assumindo que γ é constante, integre-se a expressão anterior,

$$\ln P = -\gamma \ln V + \text{const.}$$

ou

$$\boxed{PV^\gamma = \text{const.}}$$

que é a equação que traduz este tipo de transformação, ou equivalentemente,

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.}$$

Note-se que $\gamma > 1$, o que implica que o declive da curva que descreve um processo adiabático num diagrama PV é maior que o declive de uma curva que descreva um processo isotérmico.

2.3 Segunda lei da termodinâmica

Enunciado de Kelvin. *Não existe nenhuma transformação termodinâmica cujo o único efeito seja a extração de calor de um reservatório e a conversão total dessa quantidade de calor em trabalho.*

Enunciado de Clausius. *Não existe nenhuma transformação termodinâmica cujo o único efeito seja a extração de calor de um reservatório e a transferência da mesma quantidade de calor para um reservatório mais quente.*

A palavra reservatório refere-se a um sistema tão grande que a perda ou o ganho de uma quantidade finita de calor não altera a temperatura do reservatório.

Para provar que os dois enunciados são equivalentes, demonstre-se que se o primeiro é falso, o segundo é falso, e vice-versa.

Dem. i Se o enunciado de Kelvin fosse falso, seria possível extrair calor de um reservatório frio e convertê-lo inteiramente em trabalho sem qualquer outro efeito, e se essa energia fosse convertida novamente em calor e transferida para um reservatório quente, o enunciado de Clausius seria inválido.

ii Se o enunciado de Clausius fosse falso, seria possível transferir calor Q_2 de um reservatório frio para um reservatório quente sem qualquer outro efeito. Considere-se uma máquina que opera entre os mesmos reservatórios. Essa máquina extrai calor Q_2 do reservatório quente e transfere calor Q_1 ($Q_1 < Q_2$) para o reservatório frio produzindo trabalho W . O resultado de todo o processo seria a conversão de uma quantidade de calor $Q_2 - Q_1 > 0$ inteiramente em trabalho sem qualquer outro efeito, o que invalidaria o enunciado de Kelvin. ■

2.3.1 Máquina de Carnot e temperatura absoluta

Máquina de Carnot. É uma substância qualquer sujeita a uma transformação cíclica reversível denominada **ciclo de Carnot**:

- i uma transformação isotérmica a uma temperatura T_2 durante a qual o sistema absorve calor Q_2 ,
- ii uma transformação adiabática,
- iii uma transformação isotérmica a uma temperatura T_1 ($T_2 > T_1$) durante a qual o sistema rejeita calor Q_1 ,
- iv e uma transformação adiabática pela qual o sistema volta ao estado inicial.

É claro que $\Delta U = 0$ e $W = Q_2 - Q_1$. A **eficiência** do sistema é,

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

Assumindo que $W > 0$, Q_2 e Q_1 têm de ser quantidades positivas caso contrário tem-se uma violação da segunda lei da termodinâmica.

Se $W < 0$, $Q_2 < 0$ e $Q_1 < 0$, a máquina opera no sentido inverso, e nesse caso chama-se **refrigerador**.

Exemplo de um ciclo de Carnot aplicado a um gás.

- i Expansão isotérmica reversível (à temperatura T_2) provocada pela absorção de calor Q_2 . O gás efectua trabalho no meio envolvente.
- ii Expansão adiabática reversível. O gás efectua trabalho no meio envolvente perdendo uma quantidade de energia interna equivalente. A temperatura desce de T_2 para T_1 .
- iii Compressão isotérmica reversível (à temperatura T_1). O gás rejeita calor Q_1 para o meio envolvente que efectua trabalho sobre o gás.
- iv Compressão adiabática reversível. O meio envolvente efectua trabalho sobre o gás aumentando a sua energia interna, o que provoca o aumento da temperatura de T_1 para T_2 .

Como este sistema é reversível pode actuar como um refrigerador.

Teorema (Carnot). *Nenhuma máquina que opere entre duas temperaturas dadas é mais eficiente do que uma máquina de Carnot.*

Dem. Considere-se por absurdo que uma máquina de Carnot C opera entre duas temperaturas T_2 e T_1 ($T_2 > T_1$) com eficiência η_C inferior à eficiência η_X de uma máquina arbitrária X , que opera entre as mesmas temperaturas. Considere-se também que a máquina X absorve calor do reservatório T_2 e rejeita calor para o reservatório T_1 produzindo trabalho W utilizado pela máquina C , que actua como um refrigerador. Como $\eta_X > \eta_C$ o fluxo de calor resultante tem a direcção do reservatório T_1 para o reservatório T_2 o que viola a segunda lei da termodinâmica. Então a eficiência da máquina X deve ser igual ou inferior à da máquina C . ■

Como a máquina X é arbitrária pode ser uma máquina de Carnot, o que leva ao seguinte

Corolário. *Todas as máquinas de Carnot que operam entre duas temperaturas dadas têm a mesma eficiência.*

Escala de temperatura absoluta. O corolário anterior permite a definição de uma escala de temperatura absoluta independente das propriedades de qualquer substância. A única propriedade comum a todas as substâncias é a segunda lei da termodinâmica. Seja η a eficiência de uma máquina de Carnot que opera entre duas temperaturas θ_2 e θ_1 , ($\theta_2 > \theta_1$),

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = 1 - \eta$$

Considere-se uma sequência de máquinas de Carnot, tal que, o calor rejeitado por uma máquina é absorvido pela máquina seguinte. Assumindo que todas as máquinas efectuam a mesma quantidade de trabalho W , então, para todo n ,

$$Q_{n+1} - Q_n = W$$

$$\frac{Q_n}{Q_{n+1}} = \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}$$

$$\frac{\theta_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{\theta_n}{Q_n}$$

Seja $x = \frac{\theta_n}{Q_n}$. x é independente de n . Então,

$$\theta_{n+1} - \theta_n = xW$$

o que resulta numa escala de temperatura de intervalos iguais. Pondo $xW = 1K$ têm-se a escala absoluta de Kelvin, que é idêntica à escala de um gás ideal, $\theta \rightarrow T$, (Prove-se esta afirmação construindo uma máquina de Carnot com um gás ideal).

O limite $\theta = 0$ chama-se **zero absoluto**. Este é um limite teórico.

2.4 Entropia

Teorema (Clausius). *Para qualquer transformação cíclica durante a qual a temperatura é definida, verifica-se que*

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

para um ciclo da transformação. A igualdade verifica-se se a transformação é reversível.

Dem. Considere-se uma transformação cíclica, em que, num ciclo, um sistema arbitrário absorve calor dQ à temperatura T fornecido por uma máquina de Carnot, que por sua vez absorve calor dQ_0 à temperatura T_0 , e seja W o trabalho resultante. Para uma máquina de Carnot,

$$\frac{dQ_0}{dQ} = \frac{T_0}{T}$$

$$Q_0 = T_0 \oint \frac{dQ}{T}$$

Sabendo que a variação da energia interna do sistema é nula, $Q_0 = W$, o que viola a segunda lei da termodinâmica, a menos que, $W \leq 0$, $Q_0 \leq 0$, e nesse caso,

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Se o sistema é reversível,

$$-\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

e combinando as duas desigualdades,

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

■

Corolário. Para uma transformação reversível, o integral,

$$\int \frac{dQ}{T}$$

depende só do estado final e do estado inicial da transformação.

Dem. Se I e II são duas linhas arbitrárias que representam transformações reversíveis entre o estado inicial A e o estado final B , e II' é a linha II percorrida no sentido inverso, o teorema de Clausius implica que,

$$\int_I \frac{dQ}{T} + \int_{II'} \frac{dQ}{T} = 0$$

mas

$$\int_{II'} \frac{dQ}{T} = - \int_{II} \frac{dQ}{T}$$

então,

$$\int_I \frac{dQ}{T} = \int_{II} \frac{dQ}{T}$$

■

Chegado este ponto, seja O um estado de referência. Defina-se a função de estado **entropia**

$$S(A) \equiv \int_O^A \frac{dQ}{T}$$

onde A é um estado qualquer. A diferença de entropia entre dois estados é

$$\Delta S = \int_B^A \frac{dQ}{T}$$

onde a linha de integração representa uma transformação reversível qualquer entre A e B . Então, para uma transformação reversível infinitesimal,

$$\boxed{dS = \frac{dQ}{T}}$$

Propriedade. *Para uma transformação arbitrária,*

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} \leq S(B) - S(A)$$

A igualdade verifica-se se a transformação é reversível.

Dem. Seja R uma linha que representa uma transformação reversível entre A e B e I uma linha representativa de um processo irreversível entre os mesmos estados. Considere-se a transformação cíclica composta por I e o reverso de R . Pelo teorema de Clausius

$$\int_I \frac{dQ}{T} - \int_R \frac{dQ}{T} \leq 0$$

$$\int_I \frac{dQ}{T} \leq \int_R \frac{dQ}{T} \equiv S(B) - S(A)$$

■

Propriedade. *A entropia de um sistema termicamente isolado nunca decresce.*

Dem. Se o sistema é termicamente isolado, $dQ = 0$ para qualquer transformação, então, pela propriedade anterior,

$$S(B) - S(A) \geq 0$$

A igualdade verifica-se se a transformação é reversível. ■

Uma consequência imediata da propriedade anterior é que um sistema no estado de equilíbrio tem entropia máxima. Para uma interpretação física da entropia considere-se dois exemplos.

Expansão isotérmica reversível de uma mole de um gás ideal. Como a energia interna de um gás ideal só depende da temperatura (2.5), $\Delta U = 0$ e $\Delta Q = W$. Considere-se que o trabalho efectuado pelo gás durante a expansão é armazenado,

$$W = P \int_1^2 dV$$

$$W = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

é a energia necessária para reverter o processo e comprimir o gás. Claro que

$$\Delta Q = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

e a variação da entropia do gás é

$$\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

e como o reservatório perde uma quantidade de calor equivalente, a variação da sua entropia é $-\Delta S$. Então a variação total da entropia é nula.

Expansão livre. Tal como na situação anterior $\Delta U = 0$, e como a entropia é uma função de estado, $\Delta S = R \ln(V_2/V_1)$. Como o reservatório não cede calor ao gás, a variação total da entropia é ΔS . Então, por comparação com o caso anterior, uma quantidade de energia $W = T\Delta S$ é "desperdiçada", havendo aumento da entropia.

Estes exemplos mostram como a entropia pode ser vista como uma medida da inviabilidade da utilização da energia de um determinado estado.

2.5 Consequências da segunda lei

Recorde-se as expressões de dQ da secção relativa à primeira lei. Estas envolvem derivadas de U , que não são directamente mensuráveis. Pretende-se por isso reescrever estas fórmulas explorando o facto de que dS é um diferencial exacto. Considere-se por exemplo a eq. (2.2)

$$dQ = T dS = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV$$

$$dS = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV$$

Como dS é um diferencial exacto $\frac{\partial}{\partial V} \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial S}{\partial V}$, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial V} + P \right)$$

onde os índices das derivadas parciais foram omitidos. Diferenciando os dois lados na expressão anterior tem-se a **equação da energia**,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

que expressa a derivada da energia em termos das quantidades directamente mensuráveis T , P e V . Recorde-se de que na experiência de Joule da expansão livre de um gás, U só depende de T . Substituindo a eq. de estado para um gás ideal na fórmula anterior verifica-se que esta dependência é uma consequência da segunda lei,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{P}{T} \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0$$

Considere-se agora os coeficientes directamente mensuráveis,

$$\text{Coef. de expansão térmica: } \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$\text{Coef. de compressão isotérmica: } \kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$$\text{Coef. de compressão adiabática: } \kappa_S = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$$

Voltando à equação da energia, aplicando a regra da cadeia ao termo $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{(\partial T / \partial V)_P (\partial V / \partial P)_T} = \frac{(\partial V / \partial T)_P}{(\partial V / \partial P)_T} = \frac{\alpha}{\kappa_T}$$

e substituindo na eq. da energia, $\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \frac{\alpha T}{\kappa_T} - P$, então,

$$T dS = C_V dT + \frac{\alpha T}{\kappa_T} dV \quad (2.6)$$

As restantes expressões de $T dS$ obtêm-se seguindo um raciocínio idêntico para os conjuntos de variáveis independentes (T, P) e (V, P) ,

$$T dS = C_P dT - \alpha T V dP \quad (2.7)$$

2.6. POTENCIAIS TERMODINÂMICOS E RELAÇÕES DE MAXWELL 41

$$T dS = \frac{C_P}{\alpha V} dV + \left(\frac{C_P \kappa_T}{\alpha} - \alpha TV \right) dP$$

Para expressar a diferença $C_P - C_V$ para qualquer substância em termos de outras quantidades experimentais iguale-se a expressões (2.6) e (2.7),

$$C_P dT - \alpha TV dP = T dS = C_V dT + \frac{\alpha T}{\kappa_T} dV \quad (2.8)$$

e considerando que P e V são as variáveis independentes,

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP$$

substitua-se dT na igualdade (2.8),

$$\left[(C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P - \frac{\alpha T}{\kappa_T} \right] dV = \left[(C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V - \alpha TV \right] dP$$

Como V e P são independentes os coeficientes de dV e dP devem anular-se, então,

$$(C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P - \frac{\alpha T}{\kappa_T} = 0 \Rightarrow C_P - C_V = \frac{\alpha^2 TV}{\kappa_T}$$

o que mostra que $C_P - C_V > 0$ se $\kappa_T > 0$, o que se verifica experimentalmente para a maioria das substâncias.

Para transformações adiabáticas $dS = 0$, e as eqs. (2.6) e (2.7) implicam que

$$C_V = -\frac{\alpha T}{\kappa_T} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_S \quad \text{e} \quad C_P = \alpha TV \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_S$$

ora $C_P/C_V = \kappa_T/\kappa_S$. Combinando esse resultado com $C_P - C_V$ e resolvendo separadamente para C_P e C_V , conclui-se que

$$C_V = \frac{\alpha^2 TV \kappa_S}{(\kappa_T - \kappa_S) \kappa_T} \quad \text{e} \quad C_P = \frac{\alpha^2 TV}{(\kappa_T - \kappa_S)}$$

2.6 Potenciais termodinâmicos e relações de Maxwell

Condição para o equilíbrio. Combinando a primeira lei e o teorema de Clausius,

$$\Delta U \leq T \Delta S - \Delta W$$

então $\Delta U \leq 0$ se $\Delta S = \Delta W = 0$, o que significa que quando o sistema é termicamente isolado a energia interna tende para o menor valor possível. Para uma variação infinitesimal reversível da energia interna do sistema,

$$dU = T dS - P dV$$

onde S e V são as variáveis naturais de U . Se a função $U(S, V)$ é conhecida todas as propriedades termodinâmicas do sistema obtêm-se das expressões

$$P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S \quad \text{e} \quad T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V$$

chamadas **relações de Maxwell**.

Para uma variação infinitesimal reversível da entalpia $dH = d(U + PV) = dU + d(PV) = T dS - P dV + P dV + V dP$,

$$\boxed{dH = T dS + V dP}$$

onde S e P são as variáveis naturais de H . Tal como anteriormente, se $H(S, P)$ é uma função conhecida, todas as propriedades termodinâmicas do sistema obtêm-se das relações de Maxwell,

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_P \quad \text{e} \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_S$$

Se S e P são valores fixos, $H(S, P)$ é mínimo no estado de equilíbrio.

Claro que os pares (S, V) e (S, P) não são fáceis de manipular em laboratório. De seguida, introduzem-se novos potenciais termodinâmicos e as respectivas relações de Maxwell, cujas variáveis naturais são directamente mensuráveis.

Energia livre de Helmholtz. Define-se como

$$A = U - TS$$

Teorema. *Para um sistema isolado a temperatura constante a energia livre de Helmholtz nunca aumenta.*

Dem. Se um sistema sofre uma transformação arbitrária isotérmica entre dois estados,

$$\frac{\Delta Q}{T} \leq \Delta S$$

2.6. POTENCIAIS TERMODINÂMICOS E RELAÇÕES DE MAXWELL 43

Seja W o trabalho efectuado pelo sistema e recorde-se a primeira lei da termodinâmica,

$$W \leq \Delta U + T\Delta S$$

$$W \leq -\Delta A$$

A igualdade verifica-se se a transformação é reversível. Supondo que $W = 0$ o teorema fica demonstrado. ■

Corolário. *Para um sistema isolado a temperatura constante o estado de equilíbrio é o estado para o qual a energia livre de Helmholtz é mínima.*

Esta é uma condição para o equilíbrio de um sistema mecanicamente isolado a temperatura constante. Para uma variação ininitesimal reversível $dA = dU - T dS - S dT$,

$$\boxed{dA = -P dV - S dT}$$

o que implica que,

$$P = -\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T \quad \text{e} \quad V = -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_P$$

A condição de equilíbrio para um sistema a T e P constantes segue-se à definição seguinte:

Potencial de Gibbs. Define-se como

$$G = A + PV$$

Teorema. *Para um sistema isolado a temperatura e pressão constantes o potencial de Gibbs nunca aumenta.*

Corolário. *Para um sistema isolado a temperatura e pressão constantes o estado de equilíbrio é o estado para o qual o potencial de Gibbs é mínimo.*

Dem. Como T é constante $W \leq -\Delta A$,

$$P\Delta V + \Delta A \leq 0$$

$$\Delta G \leq 0$$

■

Dada uma variação infinitesimal $dG = dA + P dV + V dP = -S dT - P dV + P dV + V dP$,

$$\boxed{dG = -S dT + V dP,}$$

$$V = - \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T \quad \text{e} \quad S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P$$

O potencial de Gibbs é útil na descrição de processos químicos a pressão atmosférica constante.

Concluindo: Cada função de estado escreve-se em termos das suas variáveis naturais. Se as variáveis naturais de uma determinada função são constantes, a função tem valor mínimo no estado de equilíbrio termodinâmico. Se a função é conhecida, todas as propriedades termodinâmicas do sistema obtêm-se das relações de Maxwell associadas.

$$\begin{aligned} U(S, P) : \quad dU &= T dS - P dV \\ H(S, V) : \quad dH &= T dS + V dP \\ A(V, T) : \quad dA &= -S dT - P dV \\ G(P, T) : \quad dG &= -S dT + V dP \end{aligned}$$

As funções de estado relacionam-se entre elas através de transformações e Legendre.

Capítulo 3

Electromagnetismo

3.1 Electrostática

Uma carga em repouso gera um campo elétrico. A electrostática estuda o comportamento de campos elétricos.

3.1.1 O campo elétrico

Lei de Coulomb e campo elétrico. Considere-se uma carga pontual de teste Q em repouso na posição \mathbf{x} no espaço tridimensional $x_1x_2x_3$, e uma carga pontual q em repouso na posição \mathbf{x}' à distância $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ relativamente a Q . A força exercida por q sobre a carga de teste chama-se força de Coulomb:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

onde ϵ_0 é a **permitividade do espaço**. A força é repulsiva se as cargas tiverem o mesmo sinal e atractiva se tiverem sinais diferentes.

Se várias cargas $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ actuam na carga de teste Q , então, pelo princípio da sobreposição

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n$$

sendo F_i a força que a carga i exerce sobre Q .

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{q_2}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 + \frac{q_3}{r_3^2} \hat{\mathbf{r}}_3 + \dots + \frac{q_n}{r_n^2} \hat{\mathbf{r}}_n \right)$$

Defina-se o campo elétrico,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i$$

então

$$\boxed{\mathbf{F} = Q\mathbf{E}}$$

O valor do campo vectorial \mathbf{E} em cada ponto do espaço depende da configuração das cargas.

Para uma distribuição de carga contínua

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dq$$

onde $dq = \rho(\mathbf{x}') d^3x'$, ($d^3x' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$), isto é

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d^3x'} \quad (3.1)$$

Recorde-se a função delta de Dirac e as suas propriedades. A densidade de um conjunto discreto de cargas pode escrever-se da seguinte forma,

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (3.2)$$

Lei de Gauss. Seja $\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$ o fluxo de campo elétrico através de uma superfície \mathcal{S} de forma arbitrária. É claro que o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada qualquer que contenha uma carga q no seu interior é o mesmo que o fluxo através de uma superfície esférica de raio r arbitrário que contenha a mesma carga na sua origem. Seja \mathcal{S} uma superfície esférica,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} (r^2 \sin \phi d\theta d\phi) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

No cálculo anterior $\mathbf{E} \parallel \hat{\mathbf{n}}$ em todos os pontos da superfície. Se q se encontra fora da superfície, $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta$ o que leva a que $\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0$.

Se em vez de uma carga, tem-se n cargas no interior de \mathcal{S} , $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i$ e

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \oint_S \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \sum_{i=1}^n \oint_S \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{\epsilon_0} \right)$$

Defina-se a carga total no interior da superfície $Q_t = \sum_{i=1}^n q_i$. Para qualquer superfície fechada a lei de Gauss escreve-se,

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_t}{\epsilon_0}}$$

Lei de Gauss na forma diferencial. Pelo teorema da divergência

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{E} d^3x = \frac{Q_t}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho d^3x$$

onde \mathcal{V} indica que a integração é feita no volume considerado. Então

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (3.3)$$

A lei de Gauss permite a resolução de vários problemas de determinação do campo elétrico em casos de simetria. Contudo, para conhecer melhor o comportamento do campo, o rotacional de \mathbf{E} deve ser calculado.

Rotacional de \mathbf{E} . Dado a eq. (3.1) para o campo elétrico,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d^3x'$$

note-se que $\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$, então,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \cdot \left(\frac{1}{r} \right) \rho(\mathbf{x}') d^3x' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \int \left(\frac{1}{r} \right) \rho(\mathbf{x}') d^3x'$$

No último passo, como o gradiente é na direcção de \mathbf{x} , passa para fora do integral, e como o rotacional do gradiente é sempre nulo,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0} \quad (3.4)$$

3.1.2 Potencial elétrico e equações de Poisson e Laplace

Potencial elétrico. A eq. (3.4) mostra que o campo \mathbf{E} resulta do gradiente de uma função escalar. Seja V essa função,

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla V} \quad (3.5)$$

e

$$\boxed{V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{U}} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{r} d^3x'} \quad (3.6)$$

V define-se a menos de uma constante aditiva. O índice \mathcal{U} refere-se a todo o espaço.

Equação de Poisson. Combinando a lei de Gauss (3.3) e a eq. (3.5) obtém-se a equação de Poisson,

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

e em regiões em que $\rho = 0$ tem-se a **equação de Laplace**,

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

3.1.3 Trabalho e energia

Trabalho. Para uma interpretação física do potencial elétrico, considere-se o trabalho necessário para mover uma carga q no sentido contrário à acção do campo \mathbf{E} entre dois pontos A e B ,

$$W = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \nabla V \cdot d\mathbf{l} = -q(V_B - V_A)$$

É claro que o integral não depende do caminho percorrido pela carga, mas somente dos valores de potencial nas posições final e inicial,

$$\Delta V = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

e se o caminho percorrido pela carga é fechado, $A = B$ e $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, ora, aplicando o teorema de Stokes,

$$\oint_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

o que também demonstra o resultado já obtido para o rotacional de \mathbf{E} .

Energia associada a uma distribuição de cargas pontuais. Voltando à situação descrita no início do parágrafo anterior, se a carga q é trazida do infinito ($A = \infty$), onde o potencial é nulo ($V_A = 0$),

$$W = -qV(\mathbf{x})$$

o que também pode ser interpretado como a energia potencial da carga q no campo electrostático.

Dado um conjunto de cargas pontuais $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, seja $W_i = q_i V_{ji}(\mathbf{x}_i)$ a energia potencial da carga q_i no campo gerado pela carga q_j , com

$$V(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

A energia total é

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

ou, considerando intencionalmente os pares de cargas repetidos e dividindo a soma por 2,

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (3.7)$$

simplificando,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} q_j \right)$$

onde a soma entre parêntesis representa o potencial na posição \mathbf{x}_i da carga i gerado pelo conjunto de todas as cargas excepto a carga i . Então,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\mathbf{x}_i) \quad (3.8)$$

Note-se que os termos de "energia própria infinita" são omitidos (termos que verificam $j = i$). A expressão entre aspas ficará esclarecida no final do parágrafo seguinte. Uma expressão equivalente a (3.7) é

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{r} d^3x d^3x'$$

onde ρ é dado por (3.2).

Energia associada a uma distribuição de carga contínua. Claro que a fórmula anterior também se aplica a uma distribuição de carga contínua. Nesse caso, substituindo a expressão (3.6) para o potencial elétrico,

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x$$

Uma alternativa a este método é interpretar a energia como se estivesse armazenada no campo elétrico. Da lei de Gauss (3.3), $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$, então,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V d^3x$$

integrando por partes,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[- \int \mathbf{E} \cdot \nabla V d^3x + \int \nabla \cdot (V\mathbf{E}) d^3x \right]$$

pondo $\nabla V = -\mathbf{E}$ no primeiro integral, e aplicando o teorema da divergência no segundo integral, obtém-se

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_{\mathcal{V}} E^2 d^3x + \oint_{\mathcal{S}} V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right]$$

Na primeira expressão de W considerada neste parágrafo o volume de integração é qualquer volume que contenha toda a carga. Esse volume pode ser infinito, de facto, em zonas onde não há carga ($\rho = 0$) não há qualquer contribuição para o integral. Na expressão anterior se o integral de volume aumenta, o integral de superfície diminui na mesma quantidade porque a soma deve ser constante. Então, considerando um volume infinito, o integral em \mathcal{S} anula-se e a fórmula anterior escreve-se

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} E^2 d^3x \quad (3.9)$$

Defina-se $w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$. Esta é a energia armazenada no campo por unidade de volume.

A expressão "energia própria infinita" usada anteriormente refere-se ao resultado do cálculo da fórmula anterior para uma carga isolada:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{q^2}{r^4} \right) (r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr = \infty$$

por isso, a relação (3.8) é a apropriada para lidar com conjuntos de cargas pontuais.

É fácil ver que o princípio da sobreposição não se verifica para a energia de um sistema composto, basta para isso substituir por exemplo E^2 por $(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2$ na eq. (3.9) e ver que aparecem termos cruzados.

3.1.4 Condições de fronteira electrostáticas

Ao atravessar uma superfície \mathcal{S} com uma densidade de carga σ , o campo eléctrico sofre uma descontinuidade. Imagine-se uma caixa rectangular de área A e espessura ϵ que intersecta \mathcal{S} ,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_T = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

Se a distribuição de carga não é constante ao longo da superfície ou se a superfície é curva, a área A deve ser extremamente pequena. Quando $\epsilon \rightarrow 0$ as paredes laterais da caixa não contribuem para o fluxo, então,

$$E_{\perp 2} - E_{\perp 1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

sendo $E_{\perp 2}$ a componente do campo elétrico perpendicular a \mathcal{S} acima da superfície, e $E_{\perp 1}$ a mesma coisa abaixo da superfície. Por outro lado, utilizando um raciocínio análogo, a componente tangencial do campo é sempre contínua. De facto, imagine-se um rectângulo de largura l e altura ϵ que intersecta perpendicularmente a superfície \mathcal{S} ,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

ora, quando $\epsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{E}_{\parallel 2} = \mathbf{E}_{\parallel 1}$$

Resumindo,

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Já o potencial eléctrico é contínuo através de qualquer superfície. Recorde-se que $\Delta V = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Quando $a \rightarrow b$, $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow 0$ o que implica que $V_1 = V_2$. Contudo, o gradiente de V não é contínuo, porque como foi visto, $\mathbf{E} = -\nabla V$, então,

$$(\nabla V_2 - \nabla V_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

ou

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial n} - \frac{\partial V_1}{\partial n} \right) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

3.1.5 Condutores

Condutores são materiais em que alguns dos electrões dos átomos constituintes podem separar-se destes e mover-se livremente pelo material.

Algumas propriedades:

- i $\mathbf{E} = 0$ no interior do condutor, porque se assim não fosse haveria carga em movimento (na ausência de campos externos).
- ii $\rho = 0 \Leftarrow$ lei de Gauss.
- iii é um equipotencial. De facto, sejam a e b quaisquer dois pontos dentro (ou na superfície) de um condutor. $V(b) - V(a) = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow V(b) = V(a)$
- iv quando sujeito a um campo externo a carga resultante reside na superfície.
- v \mathbf{E} é perpendicular à superfície, imediatamente fora do condutor.

Condensadores. Um condensador é composto por duas placas condutoras com cargas $+Q$ e $-Q$ respectivamente. Como o potencial é constante nos condutores, a diferença de potencial entre as placas é dada por

$$\Delta V = - \int_{(-)}^{(+)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Recorde-se da lei de Coulomb que o campo elétrico é proporcional à carga, o que implica que também a diferença de potencial é proporcional à carga. A constante de proporcionalidade que relaciona ΔV e Q chama-se **capacitância**,

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

3.2 Campo elétrico na matéria

3.2.1 Expansão em multipolos e dipolo elétrico

Expansão em multipolos. Dada uma distribuição de carga $\rho(\mathbf{x}')$, o potencial num ponto do espaço \mathbf{x} muito longe da distribuição de carga ($\mathbf{x} \ll \mathbf{x}'$) é aproximadamente $(1/4\pi\epsilon_0)Q/r$. Pretende-se obter mais informação sobre o valor do potencial. Seja

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \rho(\mathbf{x}') d^3x'$$

Pela lei dos cosenos

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + (x')^2 - 2xx' \cos \theta' \\ &= x^2 \left[1 + \left(\frac{x'}{x} \right) - 2 \left(\frac{x'}{x} \right) \cos \theta' \right] \end{aligned}$$

onde θ' é o ângulo entre \mathbf{x} e \mathbf{x}' , ou simplificando,

$$r = x\sqrt{1 + \epsilon} \quad , \quad \text{com} \quad \epsilon = \left(\frac{x'}{x} \right) \left(\frac{x'}{x} - 2 \cos \theta' \right)$$

É claro que $\epsilon \ll 1$. Considere-se por isso a expansão binomial

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon}} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \dots \right)$$

Substituindo o valor de ϵ e agrupando as potências de (x'/x) ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{x} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x'}{x} \right) \left(\frac{x'}{x} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{x'}{x} \right) \left(\frac{x'}{x} - 2 \cos \theta' \right)^2 - \dots \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[1 + \left(\frac{x'}{x} \right) (\cos \theta') + \left(\frac{x'}{x} \right)^2 (3 \cos^2 \theta' - 1)/2 - \dots \right] \end{aligned}$$

onde os coeficientes das potências de (x'/x) são os polinómios de Legendre. Então,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x'}{x} \right)^n P_n(\cos \theta')$$

e substituindo na eq. para o potencial,

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \int (x')^n P_n(\cos \theta') \rho(\mathbf{x}') d^3x'$$

Como $\mathbf{x} \ll \mathbf{x}'$ a expressão é dominada pelo termo correspondente a $n = 0$, denominado termo do **monopolo**. Cada termo que se segue representa uma aproximação cada vez melhor ao valor de $V(\mathbf{x}')$.

Dipolo elétrico. No caso em que $Q = 0$ o potencial é aproximadamente nulo e a expressão anterior é dominada pelo termo correspondente a $n = 1$ designado termo do dipolo.

$$V_{dip}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \int x' \cos \theta' \rho(\mathbf{x}') d^3x'$$

Note-se que $x' \cos \theta' = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'$, então,

$$V_{dip}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \hat{\mathbf{x}} \cdot \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x'$$

onde o integral é o **momento do dipolo**,

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x'$$

Simplificando,

$$V_{dip}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{x^2} \quad (3.10)$$

Para um conjunto de cargas pontuais $\mathbf{p} = \sum_{i=0}^n q_i \mathbf{r}'_i$.

Para um **dipolo físico**, isto é, duas cargas iguais de sinal oposto,

$$\mathbf{p} = q(\mathbf{x}'_+ - \mathbf{x}'_-) = q\mathbf{d}$$

e substituindo na eq. (3.10) obtém-se o potencial do dipolo,

$$V_{dip}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{x^2}$$

que é apenas uma aproximação. Existem outras contribuições correspondentes aos restantes termos da expansão. Contudo, no limite em que $d \rightarrow 0$ e $q \rightarrow \infty$ mantendo $p = qd$ constante, a expressão anterior representa o potencial exacto do dipolo eléctrico, que neste caso designa-se **dipolo puro**.

Nota: A expansão em multipolos depende da origem do referencial. Em particular, para o dipolo, isto só não é verdade se a carga total for nula. De facto, se a origem do referencial é colocada na posição \mathbf{a} ,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}} &= \int (\mathbf{x}' - \mathbf{a})\rho(\mathbf{x}') d^3x' = \int \mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}') d^3x' - \mathbf{a} \int \rho(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= \mathbf{p} - Q\mathbf{a} \end{aligned}$$

3.2.2 Polarização e carga ligada

Dipolo induzido e dipolo permanente. Um átomo num campo eléctrico externo tem tendência a orientar-se relativamente a este, isto é, as cargas positiva associada ao núcleo e negativa associada aos electrões sofrem forças opostas que eventualmente contrabalançam as forças internas de atracção: o dipolo diz-se polarizado. Tipicamente, se o campo eléctrico externo não é muito forte, o momento do dipolo induzido tem a direcção do campo e é proporcional a este,

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$$

Já uma molécula de água por exemplo, que é uma molécula polar, comporta-se como um dipolo permanente, que na presença de um campo externo uniforme experimenta um torque,

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-) \\ &= ((\mathbf{d}/2) \times q\mathbf{E}) + ((-\mathbf{d}/2) \times (-q\mathbf{E})) \\ &= q\mathbf{d} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

onde \mathbf{F}_+ e \mathbf{F}_- são as forças eléctricas nas cargas positiva e negativa respectivamente, e \mathbf{r}_- e \mathbf{r}_+ as respectivas posições relativamente ao centro de massa. Resumindo,

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Num campo não uniforme, \mathbf{F}_+ e \mathbf{F}_- não têm a mesma magnitude. Neste caso,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- \\ &= q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \\ &= q(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E} \\ &= (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}\end{aligned}$$

O torque é o mesmo que no do campo uniforme.

Densidade de polarização. Se um objecto com propriedades dieléctricas é sujeito a um campo elétrico externo, os átomos ou moléculas que constituem o material orientam-se relativamente ao campo pelos mecanismos descritos no parágrafo anterior. O objecto diz-se polarizado. Uma medida deste efeito é a densidade de polarização \mathbf{P} , isto é, o momento de dipolo por unidade de volume.

Carga ligada. Imagine-se um objecto nas condições do parágrafo anterior. Atendendo à eq. (3.10) para o potencial de um dipolo elétrico, pondo $\mathbf{p} = \mathbf{P} d^3x'$ e integrando sobre todo o volume do objecto, o potencial num ponto \mathbf{x} do espaço fora do objecto é

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{x^2} d^3x'$$

e como $\nabla' \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\hat{\mathbf{x}}}{x^2}$ (note-se que o gradiente é na direcção de \mathbf{x}'),

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{x} \right) d^3x'$$

Integrando por partes,

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{x} \right) d^3x' - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{x} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d^3x' \right]$$

e aplicando o teorema da divergência ao primeiro integral,

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{x} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{x} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d^3x'$$

onde o primeiro integral representa o potencial da carga da superfície e o segundo o potencial da carga do volume.

Defina-se a densidade de **carga superficial ligada**

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

e a densidade de **carga volúmica ligada**

$$\rho_b = -\nabla' \cdot \mathbf{P}$$

Simplificando a eq. para o potencial,

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_b}{x} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{x} d^3x'$$

O campo elétrico devido à polarização é o campo gerado pela carga ligada.

3.2.3 Meios dielétricos

Lei de Gauss. A densidade de carga total num meio dielétrico é a soma da densidade de carga ligada e a **densidade de carga livre** ρ_f associada por exemplo a um condutor ou a iões livres no material dielétrico. Substituindo $\rho = \rho_b + \rho_f$ na lei de Gauss (3.3),

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_f$$

onde o campo elétrico corresponde à carga total. Defina-se o **deslocamento elétrico** $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. A lei de Gauss lê-se

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f}$$

ou na forma integral

$$\boxed{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_f} \quad (3.11)$$

Rotacional de D. Ao contrário do campo elétrico o rotacional do deslocamento elétrico não se anula, de facto

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{D} &= \nabla \times (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \\ &= \epsilon_0 \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{P} \\ &= \nabla \times \mathbf{P} \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{P}} \quad (3.12)$$

Condições de fronteira. Recorde-se os métodos utilizados para determinar as condições de fronteira do campo electrostático. É fácil ver que a lei de gauss (3.11) implica que

$$D_{\perp 2} - D_{\perp 1} = \sigma_f$$

e que a eq. (3.12) \Rightarrow

$$\mathbf{D}_{\parallel 2} - \mathbf{D}_{\parallel 1} = \mathbf{P}_{\parallel 2} - \mathbf{P}_{\parallel 1}$$

3.2.4 Meios dielétricos homogéneos, lineares e isotrópicos

Meio dielétrico linear. Para muitas substâncias a polarização é proporcional ao campo elétrico, se este não é muito forte.

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

onde χ_e é a **susceptibilidade dielétrica**, que depende da estrutura microscópica da substância. Uma substância cuja polarização tenha o comportamento descrito pela equação anterior quando sujeita a um campo elétrico fraco é um meio linear ou um dielétrico linear. Note-se que \mathbf{E} é o campo total composto pelo campo externo e as conseqüentes contribuições geradas pela polarização.

Para um meio linear

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \end{aligned}$$

Seja $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ a permitividade do meio. Então, para um meio linear

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

Também se pode escrever $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, que se designa permitividade relativa ou **constante dielétrica**.

Meio dielétrico linear e homogéneo. Se o meio é homogéneo, isto é, se as propriedades do meio não variam no espaço, especificamente a susceptibilidade, então,

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{D} = 0}$$

Condições de fronteira. Repare-se que num meio com as características descritas, a carga ligada é proporcional à carga livre.

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \mathbf{D} \right) = - \left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_f$$

Em particular se a carga livre reside na superfície, $\rho = 0$ no interior do material o que implica que o potencial obedece à eq. de Laplace nesta região. Neste caso as condições de fronteira são da seguinte forma:

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f$$

e

$$\epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = -\sigma_f, \quad V_1 = V_2$$

3.3 Magnetostática

Enquanto uma carga estacionária produz um campo elétrico, uma carga em movimento gera um campo magnético.

3.3.1 Força de Lorentz e corrente elétrica

Lei de Lorentz. A força magnética numa carga Q com velocidade \mathbf{v} num campo magnético \mathbf{B} é dada por

$$\mathbf{F}_b = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Adicionalmente, na presença de um campo elétrico, a força resultante é

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (3.13)$$

que é a **força de Lorentz**

Trabalho. As forças magnéticas não efectuam trabalho. De facto,

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F}_b \cdot d\mathbf{l} \\ &= Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Corrente elétrica e força magnética. Considere-se um fio condutor com uma densidade de carga linear λ que se desloca a uma velocidade \mathbf{v} . A corrente elétrica no fio é

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}$$

A força magnética no fio obtém-se da seguinte forma,

$$\mathbf{F}_b = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dq = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \lambda dl = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl = \int I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

onde o último passo é possível porque $\mathbf{I} \parallel d\mathbf{l}$. Como tipicamente a corrente é constante,

$$\mathbf{F}_b = I \int (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

Para um fio físico com área de secção de corte da , percorrido por uma corrente elétrica $d\mathbf{I}$, defina-se a densidade de corrente volúmica,

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{da} \quad (3.14)$$

Se a densidade de carga em movimento é ρ , com velocidade \mathbf{v} ,

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

a força magnética no fio é

$$\mathbf{F}_b = \int (d\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho d^3x = \int (d\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3x$$

Equação da continuidade. Atendendo à eq. (3.14),

$$I = \int_S J da = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

Aplicando o teorema da divergência,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) d^3x$$

e como a carga se conserva,

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) d^3x = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d^3x = -\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) d^3x$$

onde o sinal negativo expressa o decrescimento de carga no volume \mathcal{V} . Como isto se aplica qualquer volume,

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0} \quad (3.15)$$

que é a eq. da continuidade.

3.3.2 O campo magnético

Lei de Bio-Savart. O campo magnético de uma corrente constante é dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

onde a integração é feita sobre a linha que representa o percurso da corrente. μ_0 chama-se **permeabilidade do espaço**. Para uma corrente volúmica,

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d^3x'} \quad (3.16)$$

o que, ao contrário da formulação para campo elétrico, não se aplica a uma carga pontual, uma vez que esta não constitui uma corrente.

Tal como para o campo elétrico, o princípio da sobreposição também se aplica ao campo magnético

Divergente de B.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left(\frac{\nabla \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) \right] d^3x' \end{aligned}$$

mas $\nabla \times \mathbf{J} = 0$ porque \mathbf{J} não depende de \mathbf{x} , e o rotacional no segundo termo também é nulo, por isso,

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

Na forma integral,

$$\boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0}$$

Rotacional de B e Lei de Ampère.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\mathbf{J} \left(\frac{\nabla \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right] d^3x' \end{aligned}$$

onde no primeiro termo do integral, $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r})$ ¹, então,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d^3x'$$

Como o integral depende das variáveis (x'_1, x'_2, x'_3) e o gradiente das variáveis (x_1, x_2, x_3) , deve fazer-se com que ∇ dependa das mesmas variáveis que o integral. Notando que o gradiente só actua sobre $\hat{\mathbf{r}}$,

$$-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d^3x'$$

Pondo $\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{1}{r} d^3x'$$

e integrando por partes o último termo:

$$\int (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{1}{r} d^3x' = \int \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{r} \right) d^3x' - \int \left(\frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}}{r} \right) d^3x'$$

Ora, para uma corrente constante o divergente de \mathbf{J} é nulo, portanto o segundo integral é nulo. Aplique-se o teorema da divergência ao primeiro integral,

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{r} \right) d^3x' = \int_{\mathcal{S}} \left(\frac{\mathbf{J}}{r} \right) \cdot d\mathbf{a}'$$

¹ Calcule-se o divergente da função vectorial $\mathbf{v} = (1/r^2)\hat{\mathbf{r}}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

Contudo, aplicando o teorema da divergência e integrando numa esfera de raio arbitrário centrada na origem,

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{v}) d^3x = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int \left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}})$$

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{v}) d^3x = \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) = 4\pi$$

O resultado do integral de volume reside exclusivamente no ponto $r = 0$ onde a função "explode".

Como o volume de integração \mathcal{V} é qualquer volume que contenha toda a corrente, verifica-se que, não havendo corrente na superfície de integração este termo também se anula. Finalmente,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}} \quad (3.17)$$

que é a lei de Ampère.

Lei de Ampère na forma integral. Aplique-se o teorema de Stokes à expressão anterior,

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

Seja $I_t = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{a}$ a corrente total através da superfície, então, para correntes constantes

$$\boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_t}$$

3.3.3 Vector de campo magnético

Se na região de interesse de um problema de magnetostática não há corrente elétrica, $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ e o campo magnético obtém-se de um potencial magnético escalar $\mathbf{B} = -\nabla V_b$. Neste caso particular, como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, o problema resolve-se através da eq. de Laplace $\nabla^2 V_b = 0$.

Para qualquer problema de magnetostática $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, o que significa que o campo magnético é o rotacional de uma função vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.18)$$

Vector de campo magnético (ou vector potencial). Reescreva-se a lei de Bio-Savart (3.16) utilizando a relação $\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{r} d^3x'$$

A forma geral do vector potencial é

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{r} d^3x' + \nabla \psi \quad (3.19)$$

onde o gradiente da função escalar adicional $\nabla \psi$ mostra que para uma dada indução magnética \mathbf{B} o vector potencial pode ser escolhido de forma arbitrária. Isto é uma **transformação de Gauge**, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \psi$. Transformações deste tipo são possíveis porque deixam o campo invariante. O

rotacional de \mathbf{A} anula-se para qualquer $\nabla\psi$. Substitua-se a eq. (3.18) na lei de Ampère (3.17),

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}$$

A liberdade de escolha da quantidade $\nabla\psi$ oferecida pela transformação de Gauge permite escrever $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Obtendo-se assim uma equação de Poisson para cada coordenada cartesiana,

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}}$$

A solução para \mathbf{A} num espaço ilimitado é dada por (3.19) com ψ constante:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{r} d^3x' \quad (3.20)$$

De facto, se o divergente de \mathbf{A} é nulo e o primeiro termo em (3.19) é nulo (porque $\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0$), então $\nabla^2\psi = 0$ em todo o espaço, o que implica que ψ é quanto muito uma constante, considerando que não à carga no infinito.

3.3.4 Condições de fronteira magnetostáticas

Ao atravessar uma superfície \mathcal{S} com uma corrente superficial \mathbf{K} o campo magnético sofre uma discontinuidade. Recorde-se os métodos utilizados no estudo das condições de fronteira electrostáticas. É fácil mostrar que,

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) \quad (3.21)$$

Relativamente ao vector potencial, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ garante que a componente normal é contínua. Por outro lado, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ na forma $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \phi$ significa que o fluxo através de uma superfície delimitada por uma curva fechada que intersecta \mathcal{S} anula-se, pelo que as componentes tangenciais são contínuas:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$$

A derivada de \mathbf{A} herda a discontinuidade de \mathbf{B} :

$$\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K}$$

3.4 Campo magnético na matéria

3.4.1 Expansão em multipolos e dipolo magnético

Expansão em multipolos. Recorde-se os métodos utilizados para derivar a expansão em multipolos do potencial electrostático. Supondo agora que se tem uma distribuição de corrente localizada, a fórmula aproximada para o vector potencial num ponto muito distante da distribuição de corrente obtém-se de acordo com os métodos já usados.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \oint (x')^n P_n(\cos \theta') d\mathbf{l}'$$

Tal como na expansão de V , o termo correspondente a $n = 0$ designa-se monopolo. $n = 1$ é o termo do dipolo, $n = 2$ do quadrupolo, etc. É claro que o monopolo magnético é sempre nulo uma vez que $\oint d\mathbf{l}' = 0$, o que também é uma consequência de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. De facto na natureza não há monopolos magnéticos. Então, o termo dominante na expressão anterior é o termo do dipolo, excepto no caso raro em que este também se anula.

Dipolo magnético.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{dip}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi x^2} \oint x' \cos \theta' d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi x^2} \oint (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}') d\mathbf{l}' \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi x^2} \hat{\mathbf{x}} \times \int d\mathbf{a}' \end{aligned}$$

onde na última igualdade usou-se a expressão $\oint (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l} = -\mathbf{c} \times \int d\mathbf{a}^2$.

Defina-se o **momento de dipolo magnético**:

$$\mathbf{m} = I \int d\mathbf{a}' = I \mathbf{a}'$$

² Considere-se o teorema de Stokes com $\mathbf{v} = \mathbf{c}T$, sendo \mathbf{c} um vector constante arbitrário e T um campo escalar arbitrário,

$$\begin{aligned} \oint (\mathbf{c}T) \cdot d\mathbf{l} &= \oint [\nabla \times (\mathbf{c}T)] \cdot d\mathbf{a} \\ \mathbf{c} \cdot \int T d\mathbf{l} &= \int [T\nabla \times \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \nabla T] \cdot d\mathbf{a} \\ &= - \int (\mathbf{c} \times \nabla T) \cdot d\mathbf{a} \\ &= -\mathbf{c} \cdot \int (\nabla T \times d\mathbf{a}) \end{aligned}$$

onde \mathbf{a}' é o vector área.

$$\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{x}}}{x^2} \quad (3.22)$$

Nota 1: É claro que o momento de dipolo magnético é independente da origem do referencial.

Nota 2: Para construir um **dipolo magnético puro** faz-se $I \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow 0$ com $m = Ia = const.$

3.4.2 Magnetização e corrente ligada

Todos os fenómenos magnéticos devem-se ao movimento de cargas elétricas. De facto, à escala atómica de um material com propriedades magnéticas observam-se pequenas correntes associadas ao spin dos electrões e às suas órbitas em torno dos núcleos dos átomos. Macroscopicamente estes sistemas são tratados como dipolos magnéticos. Devido à orientação aleatória dos átomos no material estes dipolos cancelam-se, mas quando um campo magnético é aplicado alinham-se relativamente ao campo e o material fica magneticamente polarizado ou **magnetizado**. Materiais que adquirem magnetização paralela ao campo externo chamam-se **paramagnetos**. Materiais que adquirem magnetização oposta a \mathbf{B} designam-se **diamagnetos**. Ambos são meios lineares (3.4.4). Substâncias que retêm a sua magnetização após a remoção do campo externo são substâncias **ferromagnéticas**. Estas são meios não lineares.

Torque e força num dipolo magnético. Tal como um dipolo eléctrico experimenta um torque num campo eléctrico, um dipolo magnético experimenta

então,

$$\oint T \, d\mathbf{l} = - \int (\nabla T \times d\mathbf{a})$$

Pondo $T = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$

$$\begin{aligned} \oint (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \, d\mathbf{l} &= - \int \nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \times d\mathbf{a} \\ &= - \int [\mathbf{c} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{r}] \times d\mathbf{a} \\ &= - \int \mathbf{c} \times d\mathbf{a} \end{aligned}$$

onde as derivadas de \mathbf{c} foram omitidas por serem nulas. A última igualdade resulta do facto de que $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ e $(\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{c}$ por cálculo directo. Finalmente,

$$\oint (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \, d\mathbf{l} = -\mathbf{c} \times \int d\mathbf{a}$$

um torque num campo magnético³.

Qualquer caminho fechado percorrido por uma corrente pode ser construído a partir de rectângulos infinitesimais. Por simplicidade considere-se um caminho rectangular fechado percorrido por uma corrente I no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, centrado na origem de um referencial xyz e inclinado a um ângulo θ com o eixo y . O campo externo \mathbf{B} tem a direcção de z . A força total no rectângulo é nula uma vez que as forças nos lados inclinados cancelam-se e as forças nos lados horizontais também se cancelam, contudo, as últimas geram um torque. Seja a a medida dos lados inclinados e b a medida dos lados horizontais,

$$\mathbf{N} = aF \sin \theta \hat{\mathbf{x}}$$

sendo F a magnitude da força nos segmentos horizontais, $F = IbB$, então,

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

com $m = Iab$. O que dá o torque exacto de qualquer distribuição de corrente localizada na presença de uma campo magnético externo. A direcção do torque é tal que o dipolo tende a alinhar-se com o campo externo - paramagnetismo. Como todos os electrões constituem dipolos magnéticos e como pelo princípio de exclusão de Pauli, os electrões num átomo formam pares de spins opostos, o torque total da combinação é nulo. O paramagnetismo acontece em átomos e moléculas com número impar de electrões, em que o electrão desemparelhado é sujeito a um torque magnético.

Num campo uniforme (\mathbf{B} constante) a força num caminho fechado é nula:

$$\mathbf{F} = I \oint (\mathbf{dl} \times \mathbf{B}) = I \left(\oint \mathbf{dl} \right) \times \mathbf{B} = 0$$

Num campo não uniforme, a força exercida pelo campo num caminho fechado infinitesimal com momento de dipolo \mathbf{m} é $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$.

Densidade de magnetização. Qualquer que seja a causa da magnetização de um material, o estado de polarização magnética é descrito pelo vector de densidade de magnetização \mathbf{M} , que expressa o momento de dipolo magnético por unidade de volume.

³Neste parágrafo pretende-se dar só uma ideia dos processos microscópicos que participam na polarização magnética de um material. Para maior detalhe consultar bibliografia.

Corrente ligada. Considere-se o vector potencial de um dipolo magnético individual (3.22). Supondo que se tem um material magnetizado com momento de dipolo magnético $\mathbf{M} d^3x'$ por unidade de volume d^3x' , o vector de potencial total é

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{x}}}{x^2} d^3x'$$

Pondo $\nabla' \frac{1}{x} = \frac{\hat{\mathbf{x}}}{x^2}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \left(\nabla' \frac{1}{x} \right) \right] d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{1}{x} (\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')) d^3x' - \int \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{x} \right] d^3x' \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{x} (\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')) d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{1}{x} [\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times d\mathbf{a}'] \end{aligned}$$

onde na última igualdade, o segundo integral é reescrito usando a expressão $\int (\nabla \times \mathbf{v}) d^3x = - \oint \mathbf{v} \times d\mathbf{a}'$ ⁴. O primeiro termo na equação anterior expressa o potencial de uma **corrente volúmica ligada** $\mathbf{J}_b(\mathbf{x}') = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')$ e o segundo termo o potencial de uma **corrente superficial ligada** $\mathbf{K}_b(\mathbf{x}') = \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{n}}$. Simplificando,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_b(\mathbf{x}')}{x} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{x}')}{x} da'$$

O vector potencial e conseqüentemente o campo magnético de um objecto magnetizado é determinado pela corrente ligada.

3.4.3 Meios magnetizados

Lei de Ampère. A corrente total num meio magnetizado é soma da corrente ligada devida à magnetização com a **corrente livre** \mathbf{J}_f associada por

⁴ Substitua-se \mathbf{v} por $(\mathbf{v} \times \mathbf{c})$ (com \mathbf{c} constante) no teorema da divergência,

$$\begin{aligned} \int (\nabla \cdot \mathbf{v}) d^3x &= \oint \mathbf{v} \cdot d^3\mathbf{a} \\ \int (\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{c})) d^3x &= \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) \cdot d^3\mathbf{a} \\ \int (\mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})) d^3x &= \oint \mathbf{c} \cdot (d^3\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \\ \int (\nabla \times \mathbf{v}) d^3x &= - \oint (\mathbf{v} \times d^3\mathbf{a}) \end{aligned}$$

exemplo a um condutor (se o material magnetizado é um condutor). Em qualquer caso $\mathbf{J} = \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_f$. Reescreva-se a lei de Ampère (3.17),

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{J} = \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_f = \mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f$$

Defina-se o campo auxiliar

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

A lei de Ampère num meio magnetizado é

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$$

ou na forma integral,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{ft}$$

onde I_{ft} é a corrente livre total através de uma superfície.

Divergente de \mathbf{H} . Ao contrário do campo magnético o divergente de \mathbf{H} nem sempre se anula. De facto,

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

Condições de fronteira. Recorde-se os resultados já obtidos para as condições de fronteira magnetostáticas. Reescreva-se a expressão (3.21) em termos de \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

3.4.4 Meios magnetizados lineares

Para a maioria das substâncias:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{3.23}$$

onde a constante χ_m é a **susceptibilidade magnética**. Materiais cuja magnetização obedece à relação anterior são meios lineares. Neste caso

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}$$

Seja $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ a permeabilidade do material. No vácuo $\chi_m = 0$ implica que $\mu = \mu_0$.

Os ferromagnetos sendo meios não lineares não obedecem à eq. (3.23).

A densidade de corrente \mathbf{J}_b num meio homogéneo linear é proporcional a \mathbf{J}_f .

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times (\chi_m \mathbf{H}) = \chi_m \mathbf{J}_f$$

A menos que a corrente percorra o material toda a corrente estará à superfície.

3.5 Introdução à Electrodinâmica

A electrodinâmica clássica estuda a evolução temporal de sistemas em que campos magnéticos e campos elétricos interagem com cargas em movimento.

3.5.1 Força electromotriz

Lei de Ohm. Para a maioria das substâncias a densidade de corrente é proporcional à força por unidade de carga.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f}$$

onde σ é a **condutividade** da substância. O recíproco de σ chama-se **resistividade** $\rho = 1/\sigma$. Se a força em questão é electromagnética,

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Normalmente $\mathbf{v} \rightarrow 0$, pelo que

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Uma forma mais familiar da lei de Ohm é

$$V = RI$$

sendo R a **resistência** da substância. Note-se que R é função da geometria e condutividade do meio.

Para correntes constantes e condutividade uniforme

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

o que significa que a densidade de carga é nula. A carga reside por isso à superfície. Então, a equação de Laplace verifica-se para meios ohmicos percorridos por uma corrente constante.

Lei de Joule. Como o trabalho por unidade de carga efectuado por uma força eléctrica é V e a carga por unidade de tempo é I ,

$$P = VI = I^2R$$

Força electromotriz (fem). Independentemente do mecanismo há duas forças responsáveis pela corrente eléctrica num circuito; a força produzida pela fonte \mathbf{f}_s e a força electrostática \mathbf{E} (por unidade de carga).

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E}$$

A força electromotriz num circuito é

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l}$$

(Note -se que $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$)

Numa fonte ideal ($\sigma = \infty$) $\mathbf{E} = -\mathbf{f}_s$ e a diferença de potencial aos terminais A e B da fonte é

$$V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}$$

A passagem $\int \rightarrow \oint$ é possível porque $\mathbf{f}_s = 0$ fora da fonte.

A função de uma bateria é estruturar e manter uma diferença de potencial igual à fem. O campo electrostático resultante é responsável pela corrente no resto do circuito.

3.5.2 Indução electromagnética

Lei de Faraday. Defina-se o fluxo de \mathbf{B} através de um circuito fechado:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Pela lei de Lenz a fem num circuito em movimento relativamente a um campo magnético constante é,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

onde o sinal negativo indica que a fem induzida é sempre na direcção que se opõe a qualquer variação de corrente. Por outro lado, segundo Faraday, a variação de um campo magnético induz uma corrente eléctrica num circuito estacionário.

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

então,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

que é a lei de Faraday na forma integral. Aplicando o teorema de Stokes,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Inductância. Supondo que se tem dois circuitos em repouso e que o primeiro circuito é percorrido por uma corrente constante I_1 induzindo um campo \mathbf{B}_1 proporcional a I_1 no segundo circuito (Bio-Savart). Recorde-se a eq. (3.18). O fluxo de \mathbf{B}_1 através do segundo circuito é

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 = \int (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (3.24)$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\Phi_2 = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$$

e atendendo à eq. (3.20)

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{r}$$

sendo r a distância entre que os elementos infinitesimais dos circuitos $d\mathbf{l}_1$ e $d\mathbf{l}_2$.

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{l}_1}{r} \right) \cdot d\mathbf{l}_2$$

Então

$$\Phi_2 = M_{21} I_1$$

com

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}$$

Esta é **fórmula de Neumann** para a inductância mútua. Claro que $M_{21} = M_{12}$.

Se a corrente variar no primeiro circuito o fluxo de \mathbf{B}_1 varia no segundo circuito induzindo assim uma fem,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

Mas se a corrente varia no primeiro circuito também induz uma fem inversa no primeiro circuito. O campo é proporcional à corrente e o fluxo é proporcional à corrente por uma constante L designada inductância, que tal como M só depende da geometria do sistema.

$$\Phi = LI \quad (3.25)$$

E se a corrente varia, a fem inversa é

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

Energia num campo magnético. Qual o trabalho necessário efectuar contra a fem inversa para manter a corrente? Seja I a quantidade de carga que passa no circuito por unidade de tempo,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= -\mathcal{E}L = LI \frac{dI}{dt} \\ W &= \frac{1}{2}LI^2 \end{aligned}$$

Por outro lado, combinando as eqs. (3.24) e (3.25),

$$\begin{aligned} LI &= \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ W &= \frac{1}{2}I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dl \end{aligned}$$

e generalizando para três dimensões,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dx^3$$

Recorde-se a Lei de Ampère (3.17),

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dx^3$$

Integrando por partes e substituindo a relação (3.18) tem-se

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] dx^3 \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_{\mathcal{V}} B^2 dx^3 - \int_S \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) da \right] \end{aligned}$$

onde na última igualdade aplicou-se o teorema de Stokes. O volume de integração \mathcal{V} é qualquer um que contenha todo o campo magnético. Pode por isso considerar-se o espaço todo, pelo que \mathbf{A} e \mathbf{B} não têm representação no integral de superfície. Então,

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}} B^2 dx^3$$

o que significa que a energia está armazenada no campo magnético em unidades de $(B^2/2\mu_0)$. Compare-se este resultado com (3.9).

3.5.3 Equações de Maxwell

Resumindo os resultados até agora obtidos na descrição de campos magnéticos e campos eléctricos:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho && \text{(Lei de Gauss)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Lei de Faraday)} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} && \text{(Lei de Ampère)}\end{aligned}$$

Correcção à lei de Ampère. É sabido que a lei de Ampère se verifica para correntes constantes. Considere-se agora seu divergente:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (3.26)$$

O lado esquerdo desta eq. é obviamente nulo porque o divergente do rotacional é sempre nulo e o lado direito só é nulo se a corrente for constante, contudo, se isso não se verifica $\nabla \cdot \mathbf{J}$ não é uma quantidade nula. Reescreva-se o divergente da corrente aplicando a eq. da continuidade (3.15) e a lei de Gauss (3.3),

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Então, para que a igualdade (3.26) se verifique para correntes variáveis a lei de Ampère deve ser corrigida, tal que,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \quad (3.27)$$

onde o termo adicionado por Maxwell se designa **corrente de deslocamento**

Se a variação de um campo magnético induz a variação de um campo eléctrico, agora torna-se claro que o contrário também é verdade.

Equações de Maxwell. O seguinte conjunto de eqs. resume completamente a electrodinâmica clássica:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Lei de Gauss}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday}) \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell})\end{aligned}$$

Se as eqs. de Maxwell mostram como as cargas produzem campos, a força de Lorentz (3.13) diz-nos como os campos afectam as cargas.

Equações de Maxwell na matéria. Com vista aos desenvolvimentos já efectuados sobre campos eléctricos e campos magnéticos na matéria (secções 3.2.3 e 3.4.3), considere-se agora que qualquer variação da polarização eléctrica implica um fluxo de carga adicional, isto é uma **corrente de polarização**

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

É simples verificar que a eq. anterior satisfaz a eq. da continuidade. Nesse caso a densidade de corrente é

$$\mathbf{J}_p = \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_p = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

e a lei de Ampère (3.27)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

ou

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

onde o último termo é novamente a corrente de deslocamento. Resumindo:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Na forma integral:

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} &= Qf \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= 0 \\ \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\ \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I_f + \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}\end{aligned}$$

onde \mathcal{P} é a fronteira de qualquer superfície \mathcal{S} .

Condições de fronteira. Dadas as equações de Maxwell na forma integral, é possível derivar as condições de fronteira entre meios diferentes separados por uma superfície carregada \mathcal{S} ou percorrida por uma corrente. Considerando os métodos empregues nas secções anteriores tem-se

$$\begin{aligned}D_{\perp 1} - D_{\perp 2} &= \sigma_f \\ B_{\perp 1} - B_{\perp 2} &= 0 \\ \mathbf{E}_{\parallel 1} - \mathbf{E}_{\parallel 2} &= 0 \\ \mathbf{H}_{\parallel 1} - \mathbf{H}_{\parallel 2} &= \mathbf{K}_f \times \mathbf{n}\end{aligned}$$

No caso de meios lineares, as relações anteriores podem ser escritas em termos de \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}\epsilon_1 E_{\perp 1} - \epsilon_2 E_{\perp 2} &= \sigma_f \\ \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{\parallel 1} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{\parallel 2} &= \mathbf{K}_f \times \mathbf{n}\end{aligned}$$

Se não existe carga livre ou corrente livre as relações anteriores anulam-se. Tais relações são a base da teoria da reflexão e refração.

3.5.4 Leis da conservação

Conservação da carga. Atendendo à eq. da continuidade (3.15), se a carga total num volume varia, a mesma quantidade de carga passou através da superfície que delimita esse volume, isto é a conservação local da carga.

Teorema de Poynting. Supondo que se tem uma certa configuração de carga e corrente num instante t que geram um campo \mathbf{E} e um campo \mathbf{B} , o trabalho efectuado pelas forças electromagnéticas por unidade de carga no intervalo de tempo dt é dado por

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$$

Pondo $q = \rho dt$ e $\rho\mathbf{v} = \mathbf{J}$, a taxa de trabalho efectuado em todas as cargas no volume \mathcal{V}

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dx^3 \quad (3.28)$$

Para escrever esta expressão apenas em termos dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} invoque-se a eq. de Ampère-Maxwell,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Note-se que

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

e substituindo a lei de Faraday

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

onde

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (B^2)$$

e analogamente

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2)$$

então

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

Finalmente, substituindo a expressão anterior em (3.28) e aplicando o teorema da divergência no segundo termo obtêm-se o teorema de Poynting:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dx^3 - \frac{1}{\mu_0} \oint_S \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}$$

isto é, o trabalho efectuado nas cargas eléctricas pelas forças electromagnéticas é igual ao decrescimento da energia no campo menos a energia que passa através da superfície.

A energia transportada pelo campo por unidade de área chama-se **vector de Poynting**:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

Seja

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u_{me} dx^3$$

a taxa de variação da energia mecânica das cargas no campo. E seja

$$u_{em} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (3.29)$$

a densidade de energia no campo, então

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} (u_{me} + u_{em}) dx^3 = - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = - \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{S}) dx^3$$

Finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{me} + u_{em}) = -\nabla \cdot \mathbf{S}$$

que é a forma diferencial do teorema de Poynting que expressa a conservação da energia. Compare-se este resultado com a eq. da continuidade.

Tensor das tensões de Maxwell. Considere-se a força electromagnética que actua sobre todas as cargas num volume \mathcal{V} :

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho dx^3 = \int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dx^3$$

pelo que, a força por unidade de volume é $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ e usando as eqs. de Maxwell para eliminar ρ e \mathbf{J} tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \\ &= \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Aplique-se a lei de Faraday no último termo da expressão anterior e considere-se um termo adicional $(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$ que em nada afecta esta expressão senão estéticamente uma vez que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \\ &\quad - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Note-se que

$$\nabla(E^2) = 2(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} + 2\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

e o mesmo para \mathbf{B} . Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \epsilon_0[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}] \\ & - \frac{1}{2}\nabla\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Para simplificar este resultado introduz-se o tensor de Maxwell:

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

então,

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

Finalmente, a força total na carga contida no volume \mathcal{V} é

$$\mathbf{F} = \oint_S \nabla \cdot \mathbf{T} \, da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{S} \, dx^3$$

Caso $\int \mathbf{S} \, dx^3$ não dependa do tempo, isto é no caso estático a força só depende do tensor de Maxwell. Mais precisamente T_{ij} é a força por unidade de área na direcção i que actua no elemento de superfície orientado na direcção j .

Conservação do momento. Seja \mathbf{p}_{me} o momento total das partículas contidas no volume \mathcal{V} . De acordo com a segunda lei de Newton,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{me}}{dt} = \oint_S \nabla \cdot \mathbf{T} \, da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{S} \, dx^3$$

o que expressa a conservação do momento em electrodinâmica. O primeiro integral representa o momento no campo electromagnético e o segundo integral representa o momento por unidade de tempo transportado pelo campo através da superfície que delimita \mathcal{V} . Seja \mathbf{p}_{me} a densidade de momento mecânico e $\mathbf{p}_{em} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S}$ a densidade de momento no campo, então,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{p}_{me} + \mathbf{p}_{em}) = \nabla \cdot \mathbf{T}$$

o que representa na forma diferencial a conservação do momento. Aqui, \mathbf{T} representa a densidade de fluxo de momento.

O momento angular é simplesmente

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{em} = \epsilon_0 [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})]$$

É só quando $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ não é nulo e quando essa contribuição é tida em conta que as leis clássicas da conservação se verificam. Até campos estáticos podem armazenar momento linear e angular.

3.5.5 Ondas electromagnéticas

Equação de onda para \mathbf{E} e para \mathbf{B} . As equações de onda para os campos magnético e eléctrico obtêm-se directamente das eqs. de Maxwell:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

por outro lado

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \nabla) \mathbf{E}$$

mas $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ implica,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

então,

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

Da mesma forma que

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

sendo c a velocidade da luz no vácuo.

Note-se que cada componente de \mathbf{E} e \mathbf{B} obedece à respectiva eq. de onda.

É claro que as sols. das eqs. de onda são ondas planas,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)}$$

Basta substituir para verificar.

Lei da dispersão. $\omega = ck, \quad k = |\mathbf{k}|$

$$\omega = c(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

Velocidade de fase. $v_f = \frac{\omega}{k}$

Velocidade de grupo. $\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$

$$\mathbf{v}_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right) = c\mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad |\mathbf{s}| = 1$$

onde \mathbf{s} é direcção de propagação da onda.

Constrangimentos das ondas planas devidos às eqs. de Maxwell.

Substitua-se as eqs. para as ondas planas nas eqs. de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ &\Rightarrow ik_x E_x + ik_y E_y + ik_z E_z = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{E} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{B} \end{aligned}$$

Se os campos eléctrico e magnético são ortogonais ao vector de onda, são ortogonais à direcção de propagação - Ondas Transversais. Note-se nos cálculos anteriores que cada derivada parcial passou a um factor ik_x , etc.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{E} = -(-i\omega)\mathbf{B} \\ &\Rightarrow (ik_x, ik_y, ik_z) \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B} \\ &\Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B} \end{aligned}$$

e,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}$$

verificando-se que $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = 0$ ou seja, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

Da eq. anterior vê-se ainda que

$$\mathbf{E} = -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -c\mathbf{s} \times \mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{E}|^2 = c^2 |\mathbf{B}|^2 \quad (3.30)$$

Se $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} = 0$ e \mathbf{B} e \mathbf{E} têm a mesma fase.

Energia e momento nas ondas electromagnéticas. Substitua-se a relação (3.30) na equação (3.29) para a densidade de energia no campo electromagnético:

$$u = \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2$$

Considerando apenas a parte real do campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

e substituindo na eq. anterior,

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

A densidade média de energia no tempo é dado por

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2$$

Rescreva-se o vector de Poynting numa forma mais simples:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E} \times \mathbf{s} \times \mathbf{E}$$

Sabendo que $\mathbf{s} \times \mathbf{E} = \hat{k}$, $\mathbf{E} \times \hat{k} \mathbf{E} = \hat{i} |\mathbf{E}|^2 = \mathbf{s} |\mathbf{E}|^2$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{s} |\mathbf{E}|^2 = \epsilon_0 c |\mathbf{E}|^2 \mathbf{s} = \epsilon_0 c |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \mathbf{s}$$

e a média temporal é,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E_0|^2 \mathbf{s}$$

A *Irradiância* escreve-se,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = c \langle u \rangle \mathbf{s}$$

Isto é, o fluxo de energia = velocidade da luz \times densidade de energia.

Vimos já que $\mathbf{p} = 1/c^2 \mathbf{S}$, então,

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c} \epsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \mathbf{s} = \frac{1}{c} u \mathbf{s}$$

e

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 |E_0|^2 = \frac{1}{c} \langle u \rangle \mathbf{s}$$

É importante notar que a energia e o momento têm a direcção de propagação da onda.

Ondas electromagnéticas na matéria. É fácil verificar que os seguintes eqs. de onda para \mathbf{E} e \mathbf{B} resultam das eqs. de Maxwell na matéria:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

com lei de dispersão $k^2 = \mu\epsilon\omega^2$, e cujas soluções são da forma das ondas planas já conhecidas.

A velocidade da luz num meio é então $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

O **Índice de refração** define-se como

$$n^2 = \frac{c^2}{v^2} = \frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}$$

o que nos leva a rescrever a lei da dispersão num meio,

$$k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

Como no vácuo $\mu = \mu_0$ e $\epsilon = \epsilon_0$, logo no vácuo $n = 1$.